# Kombinatorik in der (Grund) Schule

## Problemlösekompetenzen früh und spielerisch fördern

Ulrike Kipman

*Dieser Beitrag beschäftigt sich mit dem kindlichen Problemlösen am Beispiel kombinatorischer Fragestellungen. Es wird untersucht wie Kinder an kombinatorische Fragestellungen herangehen und welche Strategien sie verwenden. Zusätzlich wird der Einfluss von verschiendenen Hintergrundvariablen (Geschlecht, Schulstufe, Interesse an Mathematik, mathematische Fähigkeiten) auf die kindliche Fähigkeit, kombinatorische Fragestellungen zu lösen untersucht. Es zeigt sich, dass es gerade im Bereich des Problemlösens wichtig ist, anschaulich und an einfachen Beispielen zu arbeiten sowie spielerische Elemente einzusetzen, um Kindern zu ermöglichen, eine Strategie für komplexere Fälle zu erarbeiten.*

*„Die Neugier steht immer an erster Stelle eines Problems, das gelöst werden soll"*
*(Galileo Galilei)*

### 1. Einleitung

Problemlösen ist eine der vier geforderten allgemeinen Kompetenzen in den Bildungsstandards Mathematik am Ende der Jahrgangsstufe 4. Es handelt sich um eine komplexe kognitive Leistung, die aus unterschiedlichen mentalen Repräsentationsleistungen und Denkprozessen besteht. Um das Problemlösen in der Schule lernen zu können, soll der Lehrer / die Lehrerin den Schülerinnen und Schülern unter Heranziehung unterschiedlicher Materialien und schriftlich fixierter Informationen eine problemhaltige Situation anbieten. Die Schülerinnen und Schüler werden angeregt, sich auf einen Lösungsprozess einzulassen und bekommen Zeit zum kreativen Bearbeiten und zum Explorieren. Der Lehrer / die Lehrerin steht in diesem Prozess im Hintergrund und bietet keine Lösungsstrategien, um persönliche Problemlöseansätze zuzulassen. Die Arbeitsergebnisse werden erst nach dem Prozess mit den Schülerinnen und Schülern reflektiert und vervollständigt, wobei vor allem die verschiedenen Denkwege der Schülerinnen und Schüler von der Lehrkraft hervorgehoben werden sollen (BIFIE, 2013, S. 8).

Dieser Beitrag widmet sich dem Thema Problemlösen im Bereich der Kombinatorik. Es werden erprobte Aufgaben und Materialien vorgestellt, mit welchen Problemlösen einfach und spielerisch in der (Grund)schule erlernt werden kann. Nach einer kurzen Begriffsklärung soll auf das Thema problemorientierte Aufgaben im Mathematikunterricht eingegangen werden. Danach werden einige Aufgaben aus diesem Feld vorgestellt und die Ergebnisse einer Studie beschrieben, in welcher Kinder und Jugendliche problemorientierte Aufgaben selbstständig unter Einsatz von Materialien (spielerisch, durch das Vertauschen, Schieben und Drehen der angebotenen Materialien) lösen sollten.

### 2. Begriffsklärungen

#### 2.1 Problemlösekompetenz

Die Kompetenz, Probleme zu lösen, brauchen Schülerinnen und Schüler immer dann, wenn Lösungen nicht naheliegend oder offensichtlich sind und deshalb strategisches Vorgehen zur Lösungsfindung notwendig ist. Sie zeigt sich demzufolge darin, dass Schülerinnen und Schüler über geeignete Strategien zum Finden mathematischer Lösungsansätze und -wege verfügen und über diese Strategien reflektieren können. Dazu ist es nötig, dass Schülerinnen und Schüler zum einen verschiedene heuristische Prinzipien und zum anderen geeignete Hilfsmittel anwenden (Zerlegungsprinzip, Legen mit Material, Verwenden von Skizzen, systematisches Probieren). Während des Problemlöseprozesses greifen

Schülerinnen und Schüler auf bereits Bekanntes (Operationen, Begriffe und Denkmodelle) zurück, vernetzen dieses im Sinne eines erfolgversprechenden Lösungsansatzes und erzeugen auf diese Weise im Finden der Lösung eigenständig neues Wissen inhaltlicher sowie strategisch-heuristischer Art (BIFIE, 2013).

Problemlösen als allgemeine Kompetenz in Mathematik heißt konkret, dass Schülerinnen und Schüler...

1. ihre mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten beim Lösen von problemhaltigen Aufgaben anwenden,

2. eigenständig Lösungsstrategien entwickeln und nutzen,

3. Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen (Transferleistungen erbringen),

4. komplexe Problemstellungen aus der Realität verstehen, wo der Lösungsweg nicht offensichtlich ist,

5. ausgehend von gegebenen Informationen trotz Barrieren eigenständig Wege zur Lösung finden und

6. sich aktiv und produktiv mit den Problemen auseinandersetzen und diese mit ihren eigenen Möglichkeiten zu lösen. (Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2005; Technische Universität München, 2015)

## 2.2 Problemorientierte Aufgaben

Problemorientierte Aufgaben weisen eine „Lücke" / „Barriere" zwischen Ausgangszustand und Zielzustand auf, sie stellen für die Schülerinnen und Schüler eine Hürde dar, die überwunden werden muss. Die Schülerinnen und Schüler müssen einen Lösungsweg suchen, sich auf den Lösungsprozess einlassen und bereits Gelerntes aktivieren und organisieren. Hierbei wird deutlich, dass beim systematischen Aufbau von Problemlösekompetenz das Lernen und Anwenden von heuristischen Regeln und das „Eigenständig-Denken-Lernen" im Vordergrund steht. Problemorientierte Aufgaben intendieren weniger den kurzfristigen und zielstrebigen Aufbau abrufbaren Wissens durch Regellernen, sondern fördern im Wesentlichen die Bereitschaft und Fähigkeit, divergent zu denken. Für die Ausbildung einer solchen Denkhaltung ist es unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler im Laufe der Zeit immer weniger auf Hilfen und Instruktionen der Lehrkraft angewiesen sind (BIFIE, 2013).

## 2.3 Heuristiken

Heuristiken dienen dazu, unterschiedliche Probleme individuell zu lösen. Um Heuristiken selbstständig einsetzen zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler zuerst im Unterricht Erfahrungen damit gesammelt haben. Erst dann können sie beim Problemlösen eine große Hilfe sein. „Im Unterschied zu einem Algorithmus liefern heuristische Strategien keine Lösungsgarantie für die vorgegebene Problemstellung. Heuristische Strategien geben stets nur wichtige Impulse zum Weiterdenken." (ebd., S. 33). Um heuristische Strategien für die Lösung eines Problems einsetzen zu können, muss zuerst das Problem im Wesentlichen verstanden werden. Erst dann sind diese Strategien Verfahren, die zur Lösungsfindung helfen können (Bruder & Collet, 2011, S. 68f).

Das Probieren gilt nur dann als heuristische Strategie, wenn es ein „systematisches Probieren" ist. Weitere bekannte Strategien sind das Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten und das Zurückführen von Unbekanntem auf Bekanntes / das Suchen nach Analogien (ebd., S. 69) durch das Umstrukturieren eines Problems (BIFIE, 2013, S. 33). Nachfolgend sollen systematisches Probieren und Analogienbildung / Rückführung auf Bekanntes (da diese Strategien in der vorliegenden

Studie verwendet wurden) kurz definiert werden[1]:

### 2.3.1 Systematisches Probieren

„Wenn Kinder eine Problemaufgabe lesen oder hören, beginnen die meisten sehr bald mit dem Probieren, um auf erste Lösungen zu kommen" (Bruder & Collet, 2011, S. 70; siehe auch BIFIE, 2013, S. 33). Auf ein unsystematisches Probieren folgt in vielen Fällen das systematische Probieren (Bruder & Collet, 2011, S. 70), bei dem ein System entwickelt wird, das alle „möglichen Fälle" enthält, um danach auf die richtige Lösung zu kommen. Diese Strategie wird vor allem bei Aufgaben, die Kombinationen enthalten und man rechnerisch nicht lösen kann, verwendet (Schnabel & Trapp, 2012, S. 14). Dieses Probieren führt jedoch nicht sofort zum Ergebnis, es ist aber vor allem in der Grundschule ein sehr hilfreiches Vorgehen, um einen Weg zur Lösung zu finden (BIFIE, 2013, S. 34).

### 2.3.2 Analogiebildung

„Der Analogieschluss als Problemlösestrategie umfasst das Aktualisieren und Durchmustern bisheriger Aufgabenlöseerfahrungen im Hinblick auf mögliche Ähnlichkeiten (Analogien) zum vorliegenden Problem". Bei dieser Strategie wird auf ähnliche Aufgaben, die bereits erfolgreich gelöst wurden, zurückgegriffen. Um auf eine Lösung zu kommen, stützt man sich somit auf bekannte Vorgehensweisen. Ähnlichkeiten können im Inhalt, in der Fragestellung sowie in der Struktur der Lösung entstehen. Des Weiteren können auch die Darstellungsform oder die Vorgehensweise gleich sein (ebd.).

## 2.4 Strategien

Nachfolgend sollen die in dieser Studie verwendeten und damit auch gekodeten Strategien angeführt werden:

- Einfache systematische Abzählstrategien werden nachfolgend mit dem Begriff *Reguläre Strategie* bezeichnet. Damit ist gemeint, dass die Testperson die Anzahl der Möglichkeiten durch systematisches Abzählen eruieren kann. Bei einer Kombinationsaufgabe vom Typ „2 aus 4" würden die sechs Möglichkeiten in folgender Art abgezählt werden „12-13-14-23-24-34" (das erste Element wird konstant gehalten und dazu werden systematisch alle anderen Elemente kombiniert).

- Mit *Schieben* ist nachfolgend eine Strategie gemeint, bei der die Testperson das jeweils letzte Element konstant hält und in der nachfolgenden Lösung als erstes Element weiterverwendet. Mit dieser Strategie würden sie „2 aus 4 - Kombinationsaufgaben" wie folgt lösen: „12-23-34…".

- Mit dem Begriff *Teilen* ist gemeint, dass die Testpersonen die Menge in verschiedene Untermengen aufteilen. Bei einem „2 aus 4 – Kombinationsproblem" würden sie folgende Strategie anwenden: „12-34-14-23-…".

- Mit einer *Fixplatzstrategie* ist gemeint, dass die Testpersonen ein Element konstant halten und die anderen Elemente permutieren (vertauschen). Die Testpersonen würden zum Beispiel bei einem Permutations-Task mit drei Elementen ein Element an seinem Platz belassen und die anderen Elemente permutieren: „123-132-213-231-312-321".

- Mit dem Begriff *Raten* ist nachfolgend gemeint, dass die Testperson – ohne die Materialien zu verwenden – eine bestimmte Anzahl angibt und auch auf Nachfragen keinen Rechenweg oder Denkweg angeben kann (die Testperson versucht, das Ergebnis zufällig zu erraten).

- *Rechnen*: Mit dem Begriff *Rechnen* ist gemeint, dass die Testperson die Anzahl

1 Näheres dazu z.B. in Andexer 2015.

ausrechnet und den Rechenweg expliziert.

- Mit der Bezeichnung *spontan* ist gemeint, dass die Testperson, nachdem sie die Aufgabe gehört hat, spontan die Lösung äußert ohne gerechnet zu haben (auf der Basis von Weltwissen, zum Beispiel bei einem „2 aus 4 – Kombinationstask angibt, die Möglichkeiten zu wissen weil es beim Fußball mit vier Mannschaften sechs Gruppen gibt).

- Mit der Bezeichnung *Transfer* ist gemeint, dass die Testperson eine Transferleistung (Schlussfolgerung) expliziert. Sie kennt beispielsweise die richtige Antwort zur Kombinationsaufgabe und kann die Anzahl der Möglichkeiten bei der gleichlautenden Variation aufgrund dieses Wissens nennen. In dieser Studie wurde (für weitergehende Analysen) bei Tasks mit 24 Lösungen zudem mitverkodet, ob der Transfer sofort, nach sechs oder zwölf Möglichkeiten erbracht wurde.

- Mit dem Begriff *Drehen* ist gemeint, dass die Person sofort die Elemente umdreht. Diese Strategie würde zum Beispiel bei einem Variationstask folgendermaßen aussehen: „12-21-13-31-…". Zudem wurde verkodet, ob die Person nach einigen Möglichkeiten erst dreht („12-13-14-21-31-41-…") oder ob sie am Ende alle Möglichkeiten in umgekehrter Reihenfolge (erst alle Kombinationen dann die entsprechenden Variationen davon) expliziert. Im Permutationstask ist damit gemeint, dass die Elemente nach hinten oder vorne gestellt werden (zum Beispiel im Permutationstask mit drei Elementen: „123-231-312…").

### 2.5 Spielerisches Lernen

Spielerisches Lernen bedeutet, dass Kinder und Jugendliche im Spiel, insbesondere durch das Experimentieren mit Materialien bestimmte Dinge verstehen (lernen) oder bestimmte Fragestellungen lösen. Sie erarbeiten sich das Verständnis der Dinge indem sie verschiedene Ansätze ausprobieren (spielen) und damit inzidentiell oder auch bewusst – ohne Zutun oder Instruktion von außen – ihr Wissen erweitern. Das Prinzip des spielerischen Lernens ist eng verbunden mit dem handlungsorientierten Lernen – „Spielen ist Handeln".

## 3. Der Prozess des Problemlösens

Polya (1995, S. 18f) teilt den Problemlöseprozess in folgende vier Phasen ein:

- Verstehen der Aufgabe
- Ausdenken eines Plans
- Ausführen des Plans
- Rückschau

Der Problemlöseprozess wird auch nach Strunz (1968) in vier Phasen aufgeteilt. Zu Beginn taucht eine Denkfrage auf. Danach wird versucht, die Frage zu klären. In der dritten Phase kommt der Einfall und die vierte Phase enthält eine intellektuelle Bearbeitung der Lösungsidee (Strunz, 1968, zitiert nach Zech, 1992, S. 294). Die Schülerinnen und Schüler lernen, ein Problem zu strukturieren, dieses zu verstehen und danach zu überlegen, was man unternimmt beziehungsweise wie man vorgehen könnte, um die Aufgabe lösen zu können. Der nächste Schritt ist das Erstellen eines Plans, mit dem man das Problem lösen kann. Die Aufgabe der Lehrperson ist es, diese vier Schritte mit den Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten (Bruder & Collet, 2011, S. 18f), sie beim Prozess zu begleiten und sie zu unterstützen.

## 4. Bezug zur Unterrichtspraxis

Methodisch ist die Förderung der Problemlösekompetenzen insbesondere in einem Unterricht zu verwirklichen, der Entdeckungen (spielerisches / handlungsorientiertes Lernen) zulässt und in dem die Lehrkraft dem Prinzip der minimalen Hilfe folgt. Die Auswahl geeigneter Aufgabenstellungen ist hier entscheidend und muss sich selbstverständlich an der kognitiven Entwicklung der Kinder orientieren. Den Schülerinnen und Schülern muss jenes Maß denkstrategischer Unterstützung angeboten werden, welches gewährleistet, dass die Schülerinnen und Schüler ihren eigenen Lösungsweg beschreiten. Im Sinne einer didaktischen Stufung im problemorientierten Unterricht werden folgende Lernschritte für die Unterrichtspraxis unterschieden (Bruder & Collet, 2011, S. 11):

1. Reflexion über Lösungen: Durch regelmäßige Gespräche über Lösungswege gewöhnen sich die Schülerinnen und Schüler an heuristische Methoden und Techniken. Sie sollen die Lösungen Anderer nachvollziehen, Fehler in eigenen und anderen Lösungen erkennen und weiterführende Strategien entwickeln (Aufbau metakognitiven Wissens).

2. Bewusstmachen heuristischer Hilfsmittel und Strategien: Bei der Bearbeitung markanter Beispiele lernen die Schülerinnen und Schüler bewusst Problemlösehilfsmittel/-strategien kennen und auszuwählen (deklaratives Wissen bewusst machen).

3. Vertiefung und Übung zu heuristischen Hilfsmitteln/Strategien sowie Bereitstellung von Beispielen mit unterschiedlicher Schwierigkeit zur selbständigen Bearbeitung (Üben, Festigen, Rückgriff auf prozedurales Wissen).

4. Reflexion und Dokumentation des eigenen Problemlösemodells (um Wissen für ähnlich gelagerte Probleme zu sammeln und zu speichern).

Beispiele für problemorientierte Aufgaben finden sich in allen Teilbereichen der Mathematik (Arbeiten mit Zahlen, Größen, Operationen, Raum etc.) für alle Schulstufen (BIFIE, 2013).

Kombinatorische Aufgaben eignen sich nicht nur in den unteren Schulstufen (aufgrund der kleinen Zahlen, dem praktischen Bezug und der vielen möglichen Heuristiken) besonders gut, um das Problemlösen auf spielerische Art und Weise zu erlernen. Auf diesem Gebiet können Kinder verschiedene Lösungswege besonders anschaulich ausprobieren und sich dadurch Problemlösekompetenzen selbst erarbeiten. Kombinatorische Aufgaben ermöglichen damit in besonderer Weise das Lernen durch Versuch und Irrtum und erleichtern damit auch die Informationsverarbeitung. Aufgaben aus diesem Bereich sind zudem einfach zu verstehen, da man sie anschaulich vermitteln kann (Ulm, 2010, S. 17). Durch den experimentellen, spielerischen Charakter führen Aufgaben im Bereich der Stochastik[2] auch zu einer hohen intrinsischen Motivation (Neubert, 2012, S. 76). Gerade beim Lösen kombinatorischer Aufgaben geht es nicht darum, etwas auswendig zu lernen oder sich Algorithmen zu merken, sondern darum, sich geeignete Strategien zur Lösung des Problems zu überlegen. Die Stochastik in den Mathematikunterricht einfließen zu lassen, ist eine Bereicherung für die Kenntnisse und Denkfähigkeiten der Lernenden (Ulm, 2010, S. 17).

## 5. Die Studie

### 5.1 Hintergrund und Fragestellungen

In der vorliegenden Studie wurden drei Typen von Kombinatorikaufgaben in verschiedenen Einkleidungen zur Überprüfung der Problemlösefähigkeiten abhängig von Schulstufe, sozialem Hintergrund, Interesse und Fähigkeiten in Mathematik sowie Geschlecht verwendet – dies deshalb, da sich derartige Aufgaben besonders gut eignen, um Problemlösekompetenzen zu prüfen (siehe Punkt 4).

2 Zur Stochastik zählen neben der Kombinatorik die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Statistik.

Es wurde untersucht, welche Strategien Kinder in den verschiedenen Schulstufen zur Lösung kombinatorischer Probleme anwenden (Systematisches Probieren, Fixplatzstrategien, ...) und ab welchem Alter Kinder entsprechende Transferleistungen bringen. Zudem wurde analysiert, ab welchem Alter Kinder für bestimmte Aufgabentypen die richtige Lösung finden können. Weiters wurde untersucht, welche Strategien angewendet werden, welche davon zur Lösung führen und welche sich nicht zum Lösen derartiger Fragestellungen eignen.

Vorgegeben wurden Aufgaben zu den Themenbereichen *Kombination, Variation und Permutation*:
Diese Aufgabentypen erfordern verschiedene logische Voraussetzungen, um sie lösen zu können und in einigen Fällen auch eine Transferleistung. An der Problemlösestudie nahmen 654 Schülerinnen und Schüler zwischen 5 und 17 Jahren (Vorschulalter bis Schulstufe 12) teil. Alle Testpersonen wurden im Einzelsetting mit verschiedenen Materialien (Eis, Autos und Parkplätze, Plastiktiere) spielerisch getestet[3].

## 5.2 Verwendete Aufgabentypen

Nachfolgend werden kurz die wichtigsten Informationen zu den drei Aufgabentypen, mit welchen die kindlichen Kombinatorikfähigkeiten und damit auch die Problemlösekompetenz geprüft wurden, zusammengestellt:

- Bei der *Kombination* gilt, dass die Anzahl der auszuwählenden Elemente kleiner ist als die Anzahl der gegebenen Elemente, d.h. es handelt sich um Fragen, wie „wie viele Möglichkeiten gibt es zwei Studierende aus 30 Studierenden auszuwählen?" Bei der Kombination ist die Reihenfolge nicht relevant – die Studenten Max und Moritz gelten als eine Kombination (a,b) = (b,a) bzw. „Max und Moritz" ist gleichbedeutend mit „Moritz und Max".

- Bei der *Variation* gilt dasselbe wie bei der Kombination mit dem Unterschied, dass in diesem Fall die Reihenfolge relevant ist. Wenn man beispielsweise vier Sorten Eis zur Auswahl hat und zwei kaufen möchte, wäre es im Fall Variation so, dass Vanille-Erdbeer als eine Möglichkeit gilt und Erdbeer-Vanille als andere Möglichkeit (b,a) ≠ (a,b), wohingegen in der Kombinationsvariante beide Möglichkeiten als eine Lösung gelten würden (b,a) = (a,b).

- Bei der *Permutation* gilt, dass die Anzahl der gewählten Elemente identisch ist mit allen möglichen Elementen. Damit ist gemeint, dass zum Beispiel gelöst werden soll, wie viele Möglichkeiten drei Tiere haben, sich in einer Reihe aufzustellen oder wie viele Möglichkeiten es gibt, drei (unterscheidbare) Bälle auf drei verschiedene Schubladen aufzuteilen (wenn in jeder Schublade ein Ball Platz hat).[4]

## 5.3 Stichprobe und erhobene Variablen

Die Stichprobe fasste insgesamt 654 Schülerinnen und Schüler (52.6% weiblich) der Vorschule und in den Schulstufen 1 bis 12. 48.3% der getesteten Schülerinnen und Schüler besuchten die Grundschule, 31.4% der getesteten Kinder waren in der Sekundarstufe II[5]. Die Kinder wurden zufällig gewählt und waren nicht in Klassen geklumpt.

Im Folgenden die Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die einzelnen Klassenstufen:

3 Eine Vorstudie ergab, dass die Lösungshäufigkeit im Einzelsetting (haptisch) signifikant höher ist als die Lösungshäufigkeit, wenn dieselben Fragen in paper-pencil Format abgefragt werden.

4 In der vorliegenden Studie wurden lediglich Varianten OHNE Zurücklegen abgefragt, weshalb hier keine Beispiele für das Ziehen mit Zurücklegen in Variation, Kombination und Permutation angeführt werden.

5 Ich bedanke mich für Unterstützung bei der Datenerhebung bei: Magdalene Altenberger, Annika Hintner, Halisa Engin, Christina Galler, Carolin Oberlohr, Bianca Ronacher, Carina Preimesberger, Nina Riedlsperger, Janina Steiner, Jenny Sampl, Sonja Hosse, Julia Pietsch, Eva-Maria Bacher, Hannah Unterberger, Bettina Söllner, Theresa Schwangler, Anna Pertl, Barbara Perreiter, Lisa Kettl, Victoria Affenzeller, Viola Krismer, Christina Jäger, Stefanie Huber, Lisa-Marie Lucky, Magdalena Kring, Elisabeth Gsenger, Evelyn Strasser, Simone Söllner, Elena Ermolaev, Michael Hitsch, Stefan Niederseer ,Markus Peßenteiner und Katharina Andexer (alle PH Salzburg).

| Schulstufe | n |
|---|---|
| Vorschule | 4 |
| 1 | 76 |
| 2 | 50 |
| 3 | 88 |
| 4 | 100 |
| 5 | 26 |
| 6 | 34 |
| 7 | 28 |
| 8 | 44 |
| 9 | 58 |
| 10 | 52 |
| 11 | 64 |
| 12 | 30 |

*Tabelle 1: Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die Klassenstufen*

Zusätzlich wurden folgende Hintergrundvariablen erhoben: Geschlecht, Schulstufe, sozialer Hintergrund (operationalisiert über die Bücher zu Hause), mathematische Fähigkeiten (5-stufig, Lehrerurteil auf einer Notenskala), mathematisches Interesse (5-stufig, Lehrerurteil auf einer Notenskala) und Freude an Mathematik (dichotom, Schülerurteil „mag Mathematik / mag nicht Mathematik").

## 5.4 Die Materialien

Zur Testung wurden verschiedene Materialien verwendet: Für die Kombination / Variation wurden einerseits Plastik-Eiskugeln und eine Plastik-Waffel, andererseits drei Spielzeugautos (zwei gleichfarbig, eines andersfarbig) samt Blatt mit 4 gezeichneten Parkplätzen verwendet. Für die Permutationsaufgabe verwendeten die Schülerinnen und Schüler erst drei und danach vier Plastiktiere.

*Abbildung 1: Verwendete Materialien (Bunter Eisspaß der Firma Lego[6], Plastiktiere der Firma Idena[7] und Spielzeugautos (Symbolbild)*

## 5.5 Aufgaben

Nachfolgend die Aufgaben, die mit den oben beschriebenen Materialien gelöst wurden und die entsprechenden Instruktionen an die TestleiterInnen:

### VARIATION UND KOMBINATION MIT DEN EISKUGELN

*Aufgabe:* Es gibt 4 Sorten Eis, das Kind darf sich 2 Sorten aussuchen, wie viele Möglichkeiten gibt es? (Reihenfolge spielt keine Rolle) | *Instruktionen:* Wenn das Kind nachfrägt: es darf keine Sorte doppelt gekauft werden. Wenn das Kind mit der Kombination anfängt, nachher die Variation erfragen.

*Aufgabe:* Wie oben, diesmal spielt die Reihenfolge aber eine Rolle (Vanille / Mango ist etwas anderes als Mango / Vanille) | *Instruktionen:* Erst ohne Hilfe probieren lassen, dann Hinweise geben wie „da fehlt noch was", „haben wir alle?"... Loben!!!

*Aufgabe:* Es gibt 4 Sorten Eis, das Kind darf sich jetzt 3 Sorten aussuchen, wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt? (zuerst ohne / dann mit Berücksichtigung der Reihenfolge – also z.B. Mango unten, dann Vanille, dann

6 http://www.manor.ch/de/shop/spielwaren/lego/lego-duplo/lego/p/P0-37312854
7 http://www.amazon.de/Idena-4329901-Zootiere-Beutel-ca/dp/B002W5VOUG

Himbeere / Mango unten, dann Himbeere, dann Vanille). | *Instruktionen:* Wenn das Kind nachfrägt, es darf keine Sorte doppelt gekauft werden. Wenn das Kind mit der Kombination anfängt, nachher die Variation erfragen sonst umgekehrt. Erst ohne Hilfe probieren lassen, dann Hinweise geben wie „vorher waren es 6 Möglichkeiten", „Vanille war erst einmal unten, die beiden anderen Sorten schon 2x"... / Loben!!!

### VARIATION UND KOMBINATION MIT DEN AUTOS

*Aufgabe:* Es gibt 4 Parkplätze und es kommen 2 Autos (zuerst die gleichen Autos nehmen, d.h. die Reihenfolge ist egal, auf 1 und 2 stellen), wie viele Möglichkeiten haben die Autos, sich hinzuparken? | *Instruktionen:* Wenn das Kind die Autos tauscht, dann hinweisen, dass es nur um die Position geht, also welche Parkplätze besetzt sind. Ohne Hilfe probieren lassen, dann Hinweise geben wie „da fehlt noch was", „haben wir alle?"... Loben!!!

*Aufgabe:* Es gibt 4 Parkplätze und es kommen jetzt 2 unterschiedliche Autos (zeigen), wie viele Möglichkeiten haben die Autos, sich hinzuparken wenn die Belegung 12 etwas anderes ist als die Belegung 21 (zeigen)? | *Instruktionen:* Entweder das Kind macht den Transfer ohne probieren, sonst ohne Hilfe probieren lassen, dann Hinweise geben wie „da fehlt noch was", „haben wir alle?"... Loben!!!

### PERMUTATION MIT DEN TIEREN

*Aufgabe:* Drei Tiere gehen spazieren (aufstellen), wie viele Möglichkeiten haben die Tiere, sich aufzustellen? *Instruktion:* Mitschreiben.

*Aufgabe:* Jetzt kommt noch das Tier XY dazu (dazustellen), es will auch mitgehen, wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt? *Instruktionen:* Erst ohne Hilfe probieren lassen, dann Hinweise geben wie „haben wir alle?", „der Elefant war schon 2 mal vorne, das Pferd erst einmal..."... Loben!!!

### 5.6 Analysen

Um feststellen zu können, welcher Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler in welcher Schulstufe die Aufgaben lösen konnte, welche Strategien angewendet wurden, welchen Einfluss bestimmte Variablen auf die Strategie und die Lösung haben und ob es Geschlechtsunterschiede gibt, wurden die Ergebnisse der Studie in eine Datenmatrix eingetragen: Lösung (ja/nein), Hilfestellung (ja/nein), Strategie. Berechnet wurden vorwiegend deskriptive Statistiken und zusätzlich einfache Korrelationsberechnungen mit dem Programm SPSS 23.0.

## 6. Ergebnisse der Studie

### 6.1 Kombination und Variation mit den Eiskugeln

#### 6.1.1. „2 aus 4"

Die Aufgabe zur *Kombination* mit den Eiskugeln konnten 86.4% der Kinder richtig lösen. Von jenen Kindern, die die Aufgabe lösen konnten (45.2%) verwendete ein Großteil den regulären Lösungsansatz (12-13-14-23-24-34). 122 Kinder (21.9%) teilten die Eiskugeln in der Mitte und bildeten damit alle möglichen Paare (12-34-14-23...). 12.9% kamen durch unstrukturiertes Arbeiten zur Lösung. Der Prozentsatz der Kinder, die die Lösung spontan (ohne probieren / ohne spielen) äußerte, rechnete oder schob (12-23-34...), war jeweils unter 10%. Die Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe nicht lösten, verwendeten in 51% der Fälle keine sichtbare Strukturierung, 18.2% der Kinder verwendeten die Strategie „Teilen" mit dem Ergebnis „vier Kombinationen sind möglich" und 22.7% verwendeten die Strategie „Rechnen", kamen aber auf die falsche Lösung. Nur acht Kinder, die die reguläre Strategie anwendeten, konnten die Aufgabe trotzdem nicht richtig lösen.

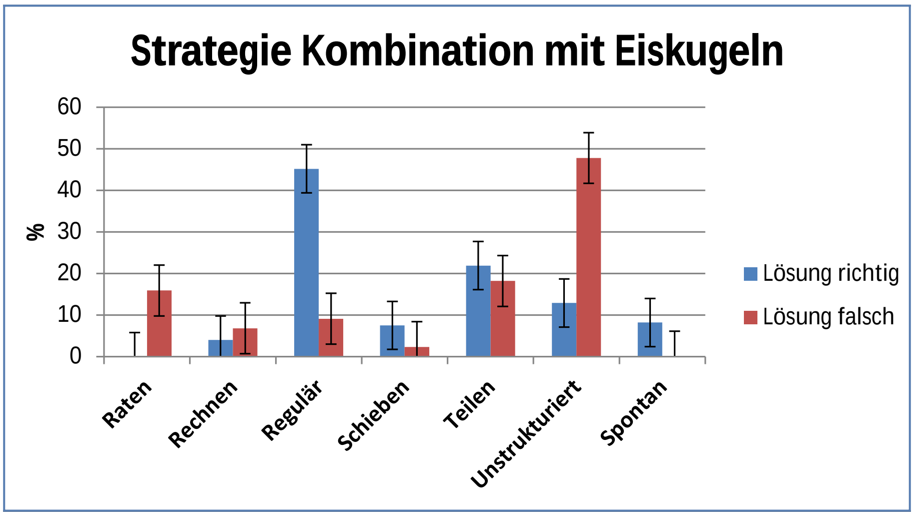


*Abbildung 2: Kombination mit den Eiskugeln - Strategien*

Von den Kindern, die die reguläre Strategie wählten und die Lösung reproduzieren konnten, brauchten 4% Hilfe, 96% dieser Kinder konnte das Problem ohne Unterstützung lösen. Beim Teilen der Eiskugeln in der Mitte brauchten 8.2% der Kinder Unterstützung, weil sie im Regelfall zwei Lösungen nicht anführten. Die Kinder, die unstrukturiert vorgingen, konnten das Problem in 19.4% der Fälle nur mit Hilfe lösen.

Es ergab sich ein schwach positiver Zusammenhang zwischen Schulstufe und der regulären Strategie ($r = .113$, $p < .01$): je höher die besuchte Klassenstufe, desto wahrscheinlicher wenden die Kinder diese Strategie an. Signifikante Geschlechtsunterschiede konnten in der Verwendung der Strategie nicht festgestellt werden ($t = 1.60$, $p > .05$). Zwischen Kindern, die die reguläre Strategie verwenden und solchen, die andere Strategien verwenden, gibt es keine signifikanten Unterschiede in den mathematischen Fähigkeiten oder im Sozialstatus ($t < 1.52$, $p > .05$).

Die *Variationsaufgabe* konnte von 77.4% der Kinder gelöst werden. Ein Großteil dieser Kinder konnte in diesem Fall eine Transferleistung („...dann sind es doppelt so viele Möglichkeiten") erbringen (45.2%). Die mit Abstand am häufigsten angewendete Strategie der Kinder, die die Aufgabe mithilfe der Materialien lösen konnten, war das Drehen der Kugeln (37.6% der Fälle). 7.4% der Kinder, die die Strategie „Drehen" anwendeten, brauchten Hilfe. Alle anderen Strategien (Drehen erst am Ende, unstrukturiertes Arbeiten, Rechnen, richtiges Raten...) wurden von weniger als 6% der Kinder angewendet. Von den Kindern, die die Aufgabe Variationen erarbeiten konnten, verwendeten 49.3% keine Struktur, 27.4% dieser Kinder drehten, explizierten aber nicht alle Kombinationen.

Signifikante Unterschiede zwischen Kindern, die die Transferleistung bringen konnten und solchen, die keine Transferleistung brachten (und die Aufgabe lösten) gab es im Hinblick auf die Klassenstufe ($t = 7.01$, $p < .01$): Je höher die Klassenstufe, desto öfter lösten die Kinder die Aufgabe per Transfer richtig. Bei den anderen fraglichen Hintergrundvariablen zeigten sich keine signifikanten Unterschiede ($t < 1.64$, $p < .05$).

### 6.1.2. „3 aus 4"

Die 3 aus 4 - *Kombinationsaufgabe* konnten 76.9% der Kinder lösen. Mehr als die Hälfte dieser Kinder löste per „systematischem Durchtauschen" (reguläre Strategie), 20.6% der Kinder verwendeten eine „Auslassungsstrategie" (immer eine Sorte wird ausge-

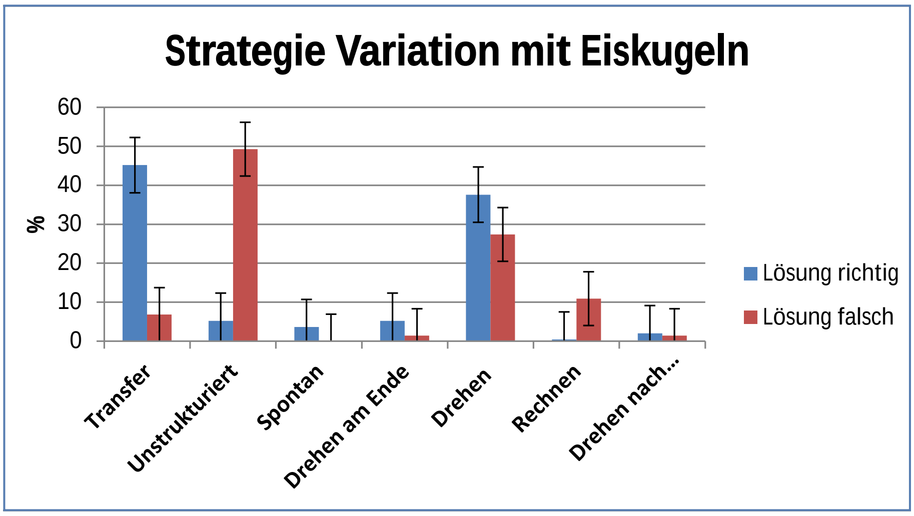


*Abbildung 3: Variation mit den Eiskugeln - Strategien*

spart, der Rest kombiniert). Knapp 10% der Kinder kamen durch unstrukturiertes Probieren auf die richtige Lösung. Interessant war, dass bei der 3 aus 4 – Aufgabe nur ein Kind (8 Jahre alt, 3. Schulstufe, überdurchschnittlicher sozialer Hintergrund) die einfache Lösung aus dem Gegenargument erkannte. („Wenn 3 Kugeln ausgewählt werden, dann wird immer eine Sorte nicht gewählt, also sind es 4 Möglichkeiten"). Alle anderen Schülerinnen und Schüler probierten die Möglichkeiten aus. Von den Kindern, die diese Aufgabe nicht lösten, verwendeten 83.5% keine spezielle Strategie („unsystematisches Probieren").

Die Variation mit den drei Eiskugeln konnten 37.3% der Kinder lösen. 33.6% dieser Kinder variierten 6-mal und konnten dann auf die insgesamt 24 Variationen schließen. 22.1% der Kinder, die die Aufgabe lösten, verwendeten eine Fixplatzstrategie, 8.2% der Kinder konnten das Ergebnis errechnen. Von den Kindern, die die Aufgabe nicht richtig lösen konnten, arbeiteten 71.7% unsystematisch.

Signifikante Unterschiede zwischen den Kindern, die einen Transfer machten und solchen, die keinen Transfer brachten (aber die Aufgabe lösen konnten) fanden sich im Sozialstatus ($t= 2.32$, $p < .05$) und in der Klassenstufe ($t= 2.52$, $p < .05$): je höher der Sozialstatus der Kinder und je höher die Klassenstufe, desto öfter lösten sie per Transfer: Während es in der Grundschule 8.9% der Kinder so lösten, waren es in der Sekundarstufe I schon 13.6% und in der Sekundarstufe II 23.5% der Kinder.

## 6.2. Variation und Kombination mit den Autos

Die *Kombinationsaufgabe* mit den Autos und Parkplätzen lösten 85.5% der Kinder. 38.7% der Kinder, die die Aufgabe lösen konnten, verwendeten die reguläre Strategie (12-13-14-…), 27.3% der Kinder lösten durch Schieben der Autos (12-23-34-…) und 14.8% der Kinder, die die Aufgabe lösten, teilten die Autos (12-34…). Von den Kindern, die die Aufgabe nicht richtig lösten, gingen 66.6% unsystematisch vor, 17.8% der Kinder verwendeten die Strategie „Schieben".

Signifikante Unterschiede ergaben sich hier beim Sozialstatus ($t= 2.66$, $p < .01$), bei den Fähigkeiten ($t= 3.14$, $p < .01$), bei der Klassenstufe ($t= 5.15$, $p < .01$) und beim Geschlecht (2.57, $p < .05$). Je höher der Status, die Fähigkeiten und die Klassenstufe, desto höher war die Lösungshäufigkeit. Mädchen lösten die Aufgabe signifikant häufiger mit der regulären Strategie als Buben.

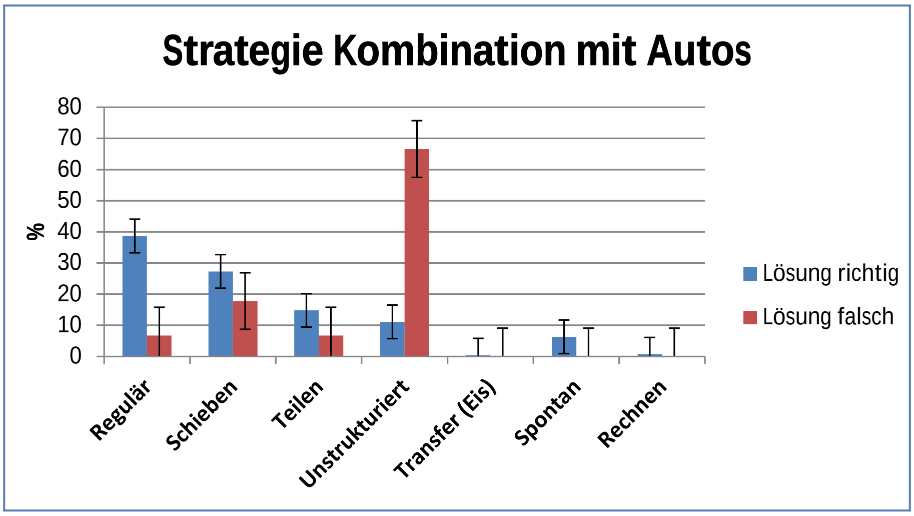


*Abbildung 4: Kombination mit den Autos - Strategien*

Die Frage zur *Variation* der Autos wurde von 72.6% der Kinder gelöst. 53% der Kinder, die die Aufgabe richtig lösten, brachten eine Transferleistung und 30.9% drehten die Autos unmittelbar. Alle anderen Strategien wurden von weniger als 10% der Kinder angewendet.

Signifikant waren die Unterschiede bezogen auf die Schulstufe (t= 5.66, p < .01): Die Kinder, die durch Transfer lösten waren in höheren Schulstufen als die Kinder, die nicht durch Transfer lösen konnten.

## 6.3. Permutation mit den Tieren (3 und 4 Elemente)

Die Permutation mit den Tieren konnten 78.4% der Kinder lösen. 43% der Kinder wendeten eine Fixplatzstrategie an (123-132…) und 22.7% der Kinder, die die Aufgabe richtig lösen konnten, drehten die Tiere durch (stellt immer nach hinten oder nach vorne und tauscht einmal), 13.1% der Kinder kamen unstrukturiert zur Lösung. Von den Kindern, die nicht lösten, wendeten 59.4% kein System an, 15.9% der Schülerinnen und Schüler drehten die Tiere, tauschten die Tiere aber nicht noch durch um alle Lösungen zu erhalten.

In der Verwendung der Fixplatzstrategie ergaben sich keine signifikanten Unterschiede in den Hintergrundvariablen (p > .05).

43% der getesteten Schülerinnen und Schüler konnten auch die Permutation mit den vier Elementen lösen. Von den Kindern, die

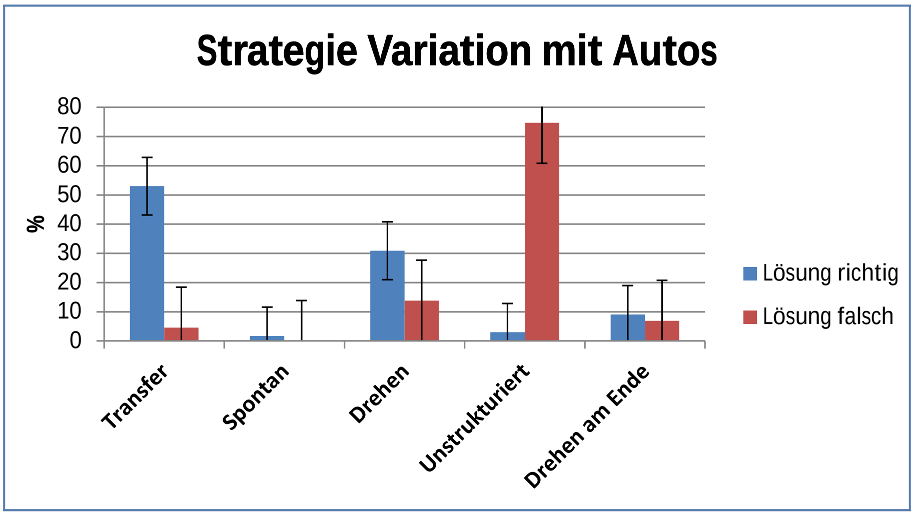


*Abbildung 5: Variation mit den Autos - Strategien*

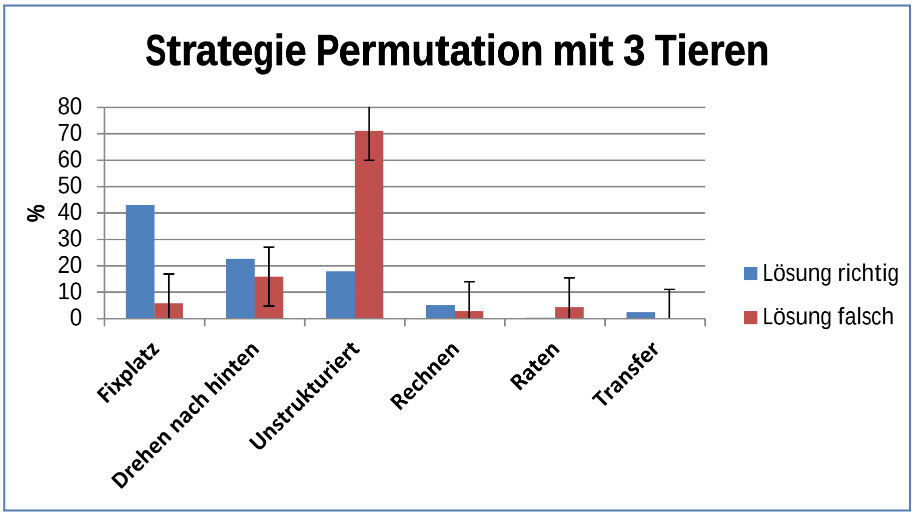


*Abbildung 6: Permutation mit 3 Tieren - Strategien*

die Aufgabe richtig lösen konnten, brachten 29% einen Transfer und 21.7% konnten nach 6 Lösungen die korrekte Anzahl der Kombinationen nennen, 10.1% der Kinder verwendeten eine Fixplatzstrategie mit 2 Fixplätzen und konnten so die richtige Anzahl errechnen.

Die Kinder, die die Aufgabe nicht richtig lösten, verwendeten zum Großteil (52.4%) kein System, 15.8% dieser Kinder permutierten mit einem Fixplatz und kamen auf 12 oder 16 Möglichkeiten (es wurde nicht vollständig durchpermutiert mit den restlichen drei Tieren), 11.5% dieser Kinder probierten die Lösung zu errechnen, scheiterten aber.

In den Hintergrundvariablen zeigten sich Unterschiede darin, ob die Kinder Mathematik mögen ($t = 2.88$, $p < .01$) und ob die Kinder Interesse an Mathematik haben ($t= 2.29$, $p < .05$).

## 6.4. Vergleich Papier-Bleistift-Lösungen vs. Einzelsetting mit Materialien

Im Vergleich zu einer Papier-Bleistift-Testung (paper-pencil-test) aus einer anderen Studie mit 617 Schülerinnen und Schülern war die Lösungshäufigkeit für Schülerinnen und Schüler der Grundschule für die drei Tiere in der Reihe (Permutation) im Einzelsetting mit den Materialien 2.6-mal so hoch: 26.9% (symbolische Darstellung im paper-pencil-test) vs. 69.7% (konkret dingliche Darstellung im 1:1 Setting mit den Materialien). Bei der Aufgabe zu den vier Tieren ergab sich mit 2.4% vs. 26.8% (konkret dingliche Darstel-

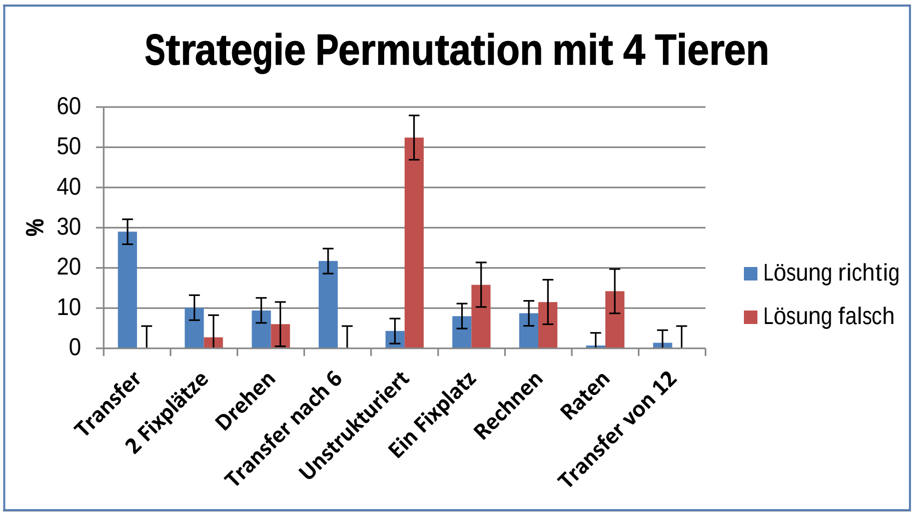


*Abbildung 7: Permutation mit 4 Tieren - Strategien*

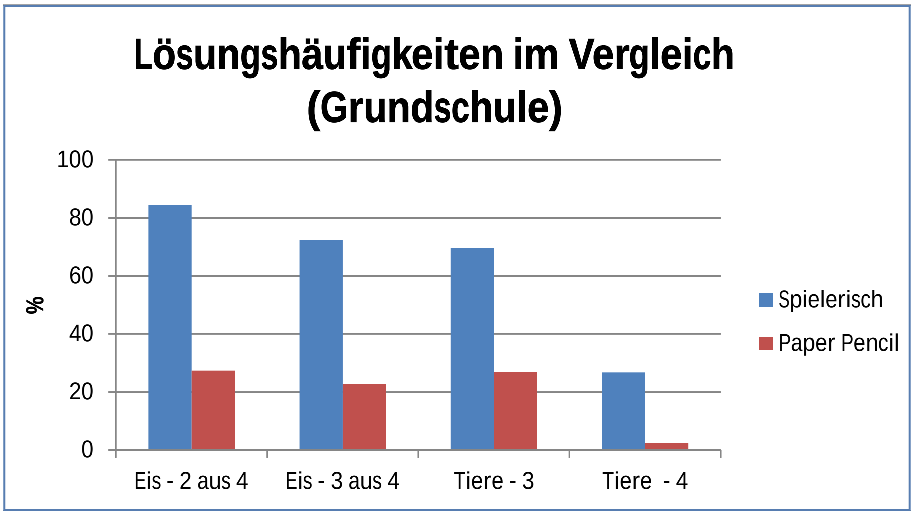


*Abbildung 8: Lösungshäufigkeiten im Vergleich*

lung) eine mehr als 11-mal so hohe Lösungshäufigkeit. Schließt man diejenigen Kinder aus, die bei dieser Aufgabe im 1:1-Setting Unterstützung gebraucht haben, ist die Lösungshäufigkeit trotzdem noch 8.5-mal höher als im Paper-Pencil-Format. Bei der Aufgabe zur Kombination (Eis) war die Lösungshäufigkeit bei der konkret dinglichen Darstellung mit 84.5% bzw. 72.4% richtigen Lösungen mehr als 3-mal höher als bei der symbolischen Darstellung mit 27.4% bzw. 22.7% richtigen Lösungen.

## 7. Zusammenfassung und Diskussion

An den Ergebnissen sieht man, dass der Zugang über Materialien offenbar zu einer wesentlich höheren Lösungsrate führt als eine Paper-Pencil-Testung. Gerade im Bereich des Problemlösens scheint es wichtig zu sein, anschaulich und an einfachen Beispielen zu arbeiten, um Kindern zu ermöglichen, eine Strategie für komplexere Fälle zu erarbeiten.

Es zeigt sich deutlich, dass Kinder, die unstrukturiert / unsystematisch arbeiten, bei den komplexeren Aufgaben (hier die Aufgaben mit 24 möglichen Kombinationen) scheitern. Kinder, die schon in den einfacheren Aufgaben Strategien entwickeln, lösen wahrscheinlicher auch Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad. Bestimmte Strategien (Schieben, Teilen) funktionieren bei wenigen Möglichkeiten gut, führen aber bei komplexeren Aufgabentypen nicht (mehr) zum Ziel. Es stellt sich heraus, dass die Strategien geschlechtsunabhängig sind und auch kaum mit dem sozialen Hintergrund konfundiert sind. Wesentlichster Einflussfaktor ist die Schulstufe: Je älter die Kinder werden (bzw. je höher die Schulstufe), desto besser werden die Strategien und desto öfter erbringen Kinder entsprechende Transferleistungen.

Oft wird der einfache Lösungsweg nicht gesehen oder es wird – trotzdem man die Lösung des einfachen Tasks (zum Beispiel alle Möglichkeiten der Kombination oder die Möglichkeiten bei der Permutation von 3 Tieren) schon kennt – wieder alles aufgebaut und bei der weiterführenden Aufgabe umgestellt. Mit Materialien kann man Kindern und Jugendlichen entsprechende Strategien zeigen, mit ihnen reflektieren und ihnen so auf haptischer Basis (konkret dinglicher Zugang) spielerisch zu einer besseren Problemlösekompetenz verhelfen.

Es würde sich empfehlen, den konkret dinglichen und damit auch spielerischen Ansatz gerade im Grundschulalter weiter zu vertiefen und den Schülerinnen und Schülern verschiedene Materialien und Aufgabenstellungen aus der Kombinatorik zur Verfügung zu stellen, um ihnen schon frühzeitig Heuristiken zur Lösung von Problemen zur Verfügung zu stellen und ihnen somit spielerisch Kompetenzen im Problemlösen beizubringen. Ein Grund dafür ist auch, dass gerade die

Kombinatorik für Schülerinnen und Schüler in der Grundschule verschiedene, vielfältige Zugangsmöglichkeiten bietet (Hauschild, 2012, S. 30). „Gute Kinder stehen vor Herausforderungen und schwächere Kinder finden einfachere Einstiege und können so die Aufgabe auf ihrem Niveau bewältigen" (Ulm, 2010, S. 17). Zudem können die Schülerinnen und Schüler durch das Experimentieren mit realen Gegenständen Mathematik (Kombinatorik) erforschen, wodurch der Unterricht experimentell wird. Die kombinatorischen Fragestellungen haben vielfach eine formal gleiche Struktur. Durch das Bearbeiten von allgemeinen „Mustern" machen die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen in typisch mathematischen Arbeitsweisen (ebd.).

## 8. Ausblick – Ideen für spielerisches (konkret-dingliches) Problemlösenlernen in der Grundschule

Zuletzt sollen noch einige Ideen für das spielerische Erlernen von Problemlösekompetenzen angeführt werden, bei denen wenig Material benötigt wird:

1. In einem Haus gibt es vier Fenster, immer zwei Fenster sind gleichzeitig beleuchtet. Wie viele Möglichkeiten gibt es? (Material: Stift, gelbes Papier, Schere)

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Farbstifte in fünf Schlaufen am Federpenal zu stecken? (Material: Federpenal, vier verschiedenfarbige Stifte)

3. Bei einer Prüfung gibt es vier Aufgaben. Drei davon sollen gelöst werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Aufgaben auszuwählen? (Material: Vier verschiedenfarbige Zettel)

4. In einem Hotel gibt es zwei Sorten Brot, drei Sorten Butter und vier Sorten Honig. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich ein Frühstücksbrot mit Butter und Honig zu machen? (Material: Farbiges Papier)

5. Fünf Schülerinnen und Schüler kommen in die Klasse. Wie viele Möglichkeiten haben die Schülerinnen und Schüler, hereinzukommen? (Material: Fünf Kinder)

6. In einem 7-stöckigen Haus gibt es zwei Lifte und eine Treppe. Ein Lift fährt nur die ungeraden Stockwerke ab, der andere die geraden Stockwerke. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vom 2. in den 7. Stock zu gelangen, wenn man sich nur aufwärts bewegt und maximal einen Stock zu Fuß gehen möchte? (Material: Stift und Zettel)

7. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen 3-stöckigen Turm zu bauen, wenn man zwei verschiedenfarbige Steine zur Auswahl hat? (Material: Bauklötze in zwei unterschiedlichen Farben)


**Literatur**

Andexer, K. (2015). *Volksschulkinder entdecken Stochastik.* Unveröffentlichte Bakkalaureatsarbeit an der Pädagogischen Hochschule Salzburg.

BIFIE (Hrsg.) (2011). *Praxishandbuch für „Mathematik" 4. Schulstufe.* Abgerufen am 16. 12 2014 von https://www.bifie.at/system/files/dl/bist_m_vs_praxishandbuch_mathematik_4_2011-08-22.pdf

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik im Primarbereich.* Abgerufen am 21.2.2015 von http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

BIFIE (Hrsg.) (2013). *Themenheft Mathematik „Problemlösen". Volksschule Grundstufe I+II.* Graz: Leykam.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.

Hauschild, M. (2012). Zwei Renntiere beim Schlitten packen. Einführung in die Kombinatorik. *Fördermagazin*(6), S. 30-34.

Neubert, B. (2012). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule.* Offenburg: Mildenberger Verlag GmbH.

Polya, G. (1995). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: A. Francke.

Schnabel, J. & Trapp, A. (2012). *Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen - Musteraufgaben - Materialien.* Donauwörth: Auer Verlag.

Technische Universität München (Hrsg.) (2015). *Framework Feldtest PISA 2012.* Abgerufen am 21.2.2015 von http://www.pisa.tum.de/en/domains/ problemloesekompetenz/

Ulm, V. (2010). *Stochastik in der Grundschule.* Abgerufen am 29. 11 2014 von http://www.sinus-an-grundschulen.de/uploads/media/Workshop_Ulm_Stochastik.pdf

Zech, F. (1992). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen im Fach Mathematik. 7. Auflage.* Weinheim, Basel: Beltz.