

Stochastik begreifen

Eine Analyse handlungsorientierter Zugänge in aktuellen Mathematikschulbüchern der Primarstufe

Masterarbeit

an der Pädagogischen Hochschule Salzburg Stefan Zweig
zur Erlangung des akademischen Grades Master of Education (MEd)

Studiengang

Lehramt Primarstufe

Eingereicht von

Lisa Steiner, BEd

Gutachterin

Prof.ⁱⁿ MMag.ⁱⁿ DDDr.ⁱⁿ Ulrike Kipman

Salzburg, Mai 2026

Vorwort

Mathematik wird häufig als abstrakt wahrgenommen, doch gerade im Bereich der Stochastik zeigt sich, wie eng mathematische Inhalte mit alltäglichen Erfahrungen verbunden sind. Durch handlungsorientierte Zugänge können Kinder stochastische Inhalte aktiv erkunden, indem sie Daten sammeln, Material ordnen, Kombinationsmöglichkeiten ausprobieren und eigene Lösungswege entwickeln.

Die vorliegende Masterarbeit entstand aus meinem persönlichen Interesse an stochastischen Inhalten im Mathematikunterricht der Primarstufe. Erste Berührungspunkte mit der Thematik ergaben sich bereits im Rahmen meines Praktikums, in dem ich eine Unterrichtseinheit zu den Kombinationsmöglichkeiten von Kleidungsstücken durchführen konnte. Die positiven Erfahrungen aus dieser Unterrichtsstunde sowie die anschauliche Darstellungsmöglichkeit durch Materialien haben mein Interesse an diesem Themenbereich nachhaltig geprägt.

In meiner Tätigkeit als Klassenlehrerin wurde ich zunehmend auf stochastische Inhalte in Mathematikschulbüchern aufmerksam. Besonders auffällig war dabei, wie motiviert und engagiert Schülerinnen und Schüler arbeiten, wenn sie aktiv in Lernprozesse eingebunden sind, wie beispielsweise beim gemeinsamen Erstellen von Diagrammen oder beim Lösen kombinatorischer Aufgaben. Diese Beobachtungen haben mich dazu angeregt, mich im Rahmen dieser Arbeit intensiver mit handlungsorientierten Zugängen zur Stochastik auseinanderzusetzen.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei meiner Betreuerin Prof.ⁱⁿ MMag.ⁱⁿ DDDr.ⁱⁿ Ulrike Kipman für ihre fachliche Unterstützung bedanken. Ebenso gilt ein besonderer Dank meiner Schwester, die mich während des gesamten Entstehungsprozesses stets unterstützt und ermutigt hat. Mein Dank gilt außerdem meiner gesamten Familie, die mich während meines Studiums stets bestärkt und auf meinem Weg begleitet hat.

Lisa Steiner

Abstract

Die vorliegende Masterarbeit untersucht, welche handlungsorientierten Zugänge zu stochastischen Inhalten in Mathematikschulbüchern der Grundstufe 1 vorgesehen sind. Im Mittelpunkt stehen die Umsetzungsmöglichkeiten bei der Einführung der Themenbereiche Statistik, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik in der Primarstufe. Im theoretischen Teil der Arbeit werden zunächst grundlegende Begriffe der Stochastik erläutert sowie zentrale didaktische Ansätze für das stochastische Lernen dargestellt. Im empirischen Teil werden fünf Schulbuchreihen analysiert, wobei jeweils die Lehrwerke für die erste und zweite Schulstufe berücksichtigt wurden. Die Ergebnisse zeigen, dass stochastische Inhalte in allen untersuchten Lehrwerken verankert sind, jedoch in unterschiedlicher Intensität. In den Schulbüchern sind die Inhalte überwiegend alltagsnah und anschaulich aufbereitet.

Insgesamt zeigt die Analyse, dass die Schulbücher wichtige Grundlagen für stochastisches Lernen schaffen, handlungsorientierte Zugänge jedoch noch nicht in allen Bereichen gleichermaßen ausgeprägt sind. Daraus ergibt sich, dass Schulbücher eine zentrale Orientierung darstellen, die im Unterricht durch zusätzliche handlungsorientierte Methoden ergänzt werden sollte.

This master's thesis examines the action-oriented approaches to stochastic content provided in primary school mathematics textbooks. It focuses on how the topics of statistics, probability and combinatorics are introduced at primary school level. The theoretical section of the thesis first explains fundamental stochastics concepts and presents central didactic approaches to learning them. The empirical section analyses five textbook series, taking into account textbooks for both the first and second grade. The results show that stochastic content is included in all of the examined textbooks, albeit to varying degrees. The content is predominantly presented in ways that are close to everyday life and visually clear.

Overall, the analysis shows that, while the textbooks provide an important foundation for learning stochastics, action-oriented approaches have not yet been developed equally in all areas. It can therefore be concluded that, while textbooks provide an important basis, this should be supplemented in classroom practice by additional action-oriented methods.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Begriffserklärungen Stochastik	3
2.1. Statistik – Arbeit mit Daten	3
2.1.1. <i>Strichlisten und Tabellen</i>	5
2.1.2. <i>Diagramme</i>	6
2.1.3. <i>Datenanalysekreislauf</i>	7
2.2. Wahrscheinlichkeit und Zufall	8
2.2.1. <i>Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff</i>	9
2.3. Kombinatorik.....	10
2.3.1. <i>Baumdiagramme</i>	11
2.3.2. <i>Zählstrategien</i>	12
2.3.3. <i>Das allgemeine Zählprinzip</i>	14
3. Relevanz früher stochastischer Bildung	15
3.1. Lehrplanbezug	15
3.1.1. <i>Problemlöseprozess</i>	16
3.2. Stochastische Vorstellungen	17
3.3. Aktuelle Forschungsergebnisse.....	18
4. Umsetzung in der Primarstufe	21
4.1. Daten in der Primarstufe	21
4.1.1. <i>Erfassen von Daten</i>	21
4.1.2. <i>Erstellen von Diagrammen</i>	23
4.1.3. <i>Mustererkennung durch die Zusammenführung einzelner Daten</i>	24
4.2. Wahrscheinlichkeit in der Primarstufe	25
4.2.1. <i>Wahrscheinlichkeit auf einer Skala</i>	27
4.2.2. <i>Glücksspiele</i>	27
4.2.3. <i>Würfelspiele</i>	28
4.3. Kombinatorik in der Primarstufe	29
4.3.1. <i>Heuristische Strategien</i>	30
4.3.2. <i>5-Phasen-Modell</i>	31

4.3.3. <i>Unterrichtsvorschläge</i>	31
5. Schulbuchanalyse	35
5.1. Auswahl der Schulbücher	36
5.2. Richtung der Analyse und Differenzierung der Fragestellung.....	37
5.3. Analysekriterien	38
5.4. Analyse der ausgewählten Schulbücher	40
5.4.1. <i>Eins Plus</i>	40
5.4.2. <i>Lilli, Bakabu & du</i>	43
5.4.3. <i>Mathebus</i>	46
5.4.4. <i>MiniMax</i>	49
5.4.5. <i>Flex und Flo</i>	53
5.5. Ergebnisse	57
5.6. Diskussion	59
5.6.1. <i>Limitation</i>	62
6. Fazit	64
Literaturverzeichnis	65
Abbildungsverzeichnis	68
Anhang	69
Eidesstattliche Erklärung	71

1. Einleitung

Nicht nur im Mathematikunterricht spielen Daten und Wahrscheinlichkeiten eine wichtige Rolle, sondern auch in unserem alltäglichen Leben. Beim Spielen von „Mensch ärgere dich nicht“ oder auch „Kniffel“ ist Stochastik ein wesentlicher Bestandteil. Aber auch mit dem Zufall und Glücksspielen werden Kinder beispielsweise beim Losziehen oder beim Drehen eines Glücksrades konfrontiert, was einen besonderen Anziehungspunkt darstellt. Aufgrund dieser Begegnungen im Alltag ist die bewusste Auseinandersetzung mit Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten von grundlegender Bedeutung (PIKAS, 2019).

Durch die Begegnung mit dem Zufall im Alltag entwickeln Kinder ihre eigenen Vorstellungen über die Wirkung des Zufalls. Bei Brettspielen versuchen Kinder, eigene Erklärungen dafür zu finden, warum sie so oft einen Sechser würfeln. Dieses Phänomen ist jedoch nicht nur in der Welt der Kinder zu beobachten, denn auch unter Erwachsenen lässt sich immer wieder feststellen, dass die Lottozahlen der letzten Wochen genau analysiert werden, um sich für den nächsten Tipp vorzubereiten (Büchter et al., 2005, S. 1).

In der heutigen modernen Welt haben Daten einen sehr großen Einfluss auf unser Leben. Gesammelte Daten bestimmen unsere Entscheidungen und bilden zudem die Grundlage für politische oder wirtschaftliche Entscheidungen. Dadurch, dass ein grundlegendes Ziel schulischer Bildung die Teilnahme an der Gesellschaft ist, sollten laut Eichler (2020, S. 28) auch Kenntnisse zu Wahrscheinlichkeiten und Daten dazugehören, um gesellschaftliche Entwicklungen kritisch hinterfragen zu können.

Vor diesem Hintergrund kommt der schulischen Auseinandersetzung mit stochastischen Inhalten eine große Bedeutung zu. Um Schülerinnen und Schüler auf ihrem Weg zu mündigen und verantwortungsbewussten Mitgliedern unserer Gesellschaft zu begleiten, sollte laut Bruns und Jensen (2021, S. 13) auch ein kritischer Zugang zur Arbeit mit Daten ermöglicht werden. Da sich Fehlvorstellungen im Bereich von Daten und Wahrscheinlichkeiten bis ins Erwachsenenalter verfestigen können, ist es bereits in der Primarstufe sinnvoll, grundlegende Vorstellungen aufzubauen. Ziel des Stochastikunterrichts in der Primarstufe sollte demnach die Auseinandersetzung mit dem Prozess der Datenerhebung sein sowie die Fähigkeit, unterschiedliche Darstellungen reflektiert beurteilen zu können.

Das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF, 2023) hebt mit dem neuen Lehrplan 2023/24 den Bereich „Daten, Häufigkeiten, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten“ in der Primarstufe als eigenständigen Kompetenzbereich hervor. Damit sind für Lehrpersonen neue fachliche und didaktische Anforderungen verbunden, insbesondere im Hinblick auf eine altersentsprechende und handlungsorientierte Umsetzung im Unterricht (Apfler et al., 2023, S. 4–5).

Eine zentrale Rolle kommt in diesem Zusammenhang den Schulbüchern zu, da diese den Mathematikunterricht in der Primarstufe wesentlich mitprägen, Inhalte strukturieren und konkrete Aufgabenformate vorgeben. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, welche Zugänge zu stochastischen Inhalten aktuelle Schulbücher der Primarstufe bieten, welche Materialien und Handlungsmöglichkeiten sie aufzeigen und inwiefern sie den im Lehrplan geforderten Prinzipien des handlungsorientierten Lernens entsprechen. Ausgehend davon werden in der vorliegenden Masterarbeit fünf Mathematikschulbücher der Grundstufe 1 hinsichtlich der didaktischen Aufbereitung stochastischer Inhalte analysiert.

2. Begriffserklärungen Stochastik

Stochastik ist ein Oberbegriff und kommt von dem griechischen Wort „stochasmos“, was „Vermutung“ bedeutet. Die Inhalte können in die drei Teilbereiche Statistik, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik eingeteilt werden. Der Bereich Statistik befasst sich mit dem Erfassen, Darstellen und Interpretieren von Daten. In dem Teilbereich Wahrscheinlichkeit steht der Zufall im Mittelpunkt. Dabei wird versucht, den Zufall zu versprachlichen und mit Zahlen darzustellen. Die Kombinatorik befasst sich mit dem systematischen Zählen von vorhandenen Möglichkeiten (Ulm, 2010, S. 2).

In den folgenden Kapiteln werden die Teilbereiche genauer erklärt.

2.1. Statistik – Arbeit mit Daten

Der Begriff „Daten“ kommt aus dem Lateinischen (lat. *dare*), bedeutet „geben“ und ist die Pluralform des Wortes „Datum“ (lat. *Datum* = das Gegebene), welches sich in der deutschen Sprache vielmehr auf die kalendarische Einheit bezieht. Daten bezeichnen geordnete Informationseinheiten, welche gespeichert und übermittelt werden können. Im Zusammenhang mit beschreibender Statistik wird „Daten“ nur im Plural verwendet, da es sich immer um eine Sammlung von Daten handelt. Übertragen können Daten nur werden, wenn sie eine Struktur aufweisen und passend dargestellt sind. Ein weiterer zentraler Begriff in dieser Masterarbeit ist „Statistik“. Dieser ist auf das lateinische Wort „status“ zurückzuführen und steht für Verfassung, Lage oder Zustand. Zum einen wird die mathematische Wissenschaft als Statistik bezeichnet, aber auch das Ergebnis von Erhebungen. Die Ursprünge der Statistik reichen weit in der Geschichte zurück, denn bereits vor Christus wurden Volkszählungen durchgeführt. Später wurden auch Daten aufgezeichnet, um die Bevölkerungsentwicklung zu vergleichen. Erst im 17. Jahrhundert entstand die mathematische Statistik, die inzwischen eine wichtige Rolle in der Gesellschaft spielt. Unterschieden wird heutzutage zwischen beschreibender und beurteilender Statistik. Bei der beschreibenden Statistik werden Daten erfasst und dargestellt, bei der beurteilenden Statistik werden Hypothesen erstellt, welche mithilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden überprüft werden (Neubert, 2019, S. 8). Die Masterarbeit bezieht sich jedoch hauptsächlich auf die beschreibende Statistik, da nur diese auch in der Volksschule eingesetzt wird.

In der beschreibenden Statistik werden aufeinander aufbauende Arbeitsschritte benötigt, um am Ende eine Darstellung der Daten zu erhalten. Im ersten Schritt muss klargestellt werden, was untersucht werden soll und welches Ziel verfolgt wird. Daraufhin werden Überlegungen angestellt, wie die erforderlichen Daten erhoben werden. Nachdem schließlich die Daten erfasst wurden, können die Daten dargestellt werden. Dabei ist wiederum die Entscheidung wichtig, wie diese Daten sinnvoll dargestellt werden und welche Erkenntnisse und Schlüsse daraus gezogen werden können (Neubert, 2019, S. 9; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 35).

Beim Erfassen von Daten werden Elemente erhoben, die sich auf eine vorgegebene Menge beziehen. Diese Menge wird als Grundgesamtheit betrachtet. Bei einer Befragung zum Lieblingstier der Klasse entspricht sie beispielsweise der Menge aller Kinder dieser Klasse. Die einzelnen, erhobenen Elemente werden als Merkmalsträger bezeichnet und sind in Bezug auf dieses Beispiel die einzelnen Kinder und die Lieblingstiere der Kinder werden Identifikationsmerkmal genannt. Um die Daten effektiv auswerten zu können, werden meist bereits im Vorhinein Kategorien gebildet. Diese Kategorien können ausgewählt werden und bilden die Merkmalsausprägungen. Dabei steht jede Kategorie für ein konkretes Tier. Die statistischen Einheiten in der jeweiligen Merkmalsausprägung können gezählt werden und bilden die absolute Häufigkeit. Um verschiedene Gruppen oder Datenmengen besser vergleichen zu können, wird zusätzlich die relative Häufigkeit berechnet. Diese setzt die absolute Häufigkeit ins Verhältnis zur Gesamtzahl der Befragten. Berechnet wird bei der relativen Häufigkeit der Quotient von der absoluten Häufigkeit und der Grundgesamtheit (Neubert, 2019, S. 9; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 233).

Grundsätzlich wird zwischen drei verschiedenen Typen an Merkmalen unterschieden. Ein Merkmalstyp sind qualitative Merkmale. Dies sind Beschreibungen von Ausprägungen, die nicht messbar sind und demnach gleichberechtigt sind. Ein Beispiel für ein qualitatives Merkmal ist die Haarfarbe der Kinder. Ein weiterer Merkmalstyp sind Rangmerkmale, diese lassen sich im Gegensatz zu qualitativen Merkmalen nach einer bestimmten Reihenfolge ordnen. Die selbst eingeschätzte Freude am Mathematikunterricht kann beispielsweise mit den Rangmerkmalen gering, mittel und groß erhoben werden. Auch der dritte Merkmalstyp, die quantitativen Merkmale, lassen sich in eine Reihenfolge bringen und weisen zusätzlich mathematisch interpretierbare Abstände auf. Dadurch, dass quantitative Merkmale

aus reellen Zahlen bestehen, können Berechnungen oder Vergleiche vorgenommen werden. Ein quantitatives Merkmal ist beispielsweise das Alter von Personen oder die Körpergröße (Bettner & Dinges, 2018, S. 3; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 36–37).

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Daten zu erheben. Dazu zählen unter anderem Befragungen, Beobachtungen und Zählvorgänge, welche bereits in der Primarstufe durchgeführt werden können. Die Erhebungsmöglichkeit Befragung kann differenziert werden in mündliche und schriftliche Befragung. In beiden Fällen muss vor allem die Art der Fragen gut durchdacht werden. Dabei gibt es die Auswahl zwischen geschlossenen Fragen, die nur eine Auswahl der bereits vorgegebenen Antworten ermöglicht, und offenen Fragen, bei denen keine Antwortmöglichkeiten vorgegeben sind und mit eigenen Worten geantwortet werden kann. Hinsichtlich der Auswertung unterscheiden sich diese zwei Arten von Fragen stark, da sich geschlossene Fragen wesentlich schneller auswerten lassen (Neubert, 2019, S. 11–13).

Um die erhobenen Daten anschaulich darzustellen und Zusammenhänge erkennbar zu machen, bedarf es einer sinnvollen Strukturierung. Besonders gut können wichtige Informationen hervorgehoben werden, indem sie grafisch dargestellt werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten der grafischen Aufbereitung der Daten, welche jeweils ein anderes Ziel verfolgen. Die folgenden Darstellungsmöglichkeiten eignen sich vor allem für den Einsatz in der Primarstufe (Neubert, 2019, S. 14).

2.1.1. Strichlisten und Tabellen

Es ist möglich, die Beobachtungswerte unsortiert und nach der Reihe zu notieren. Die Werte können aber auch bereits während der Erhebung von Daten, nach den Merkmalsausprägungen sortiert, aufgezeichnet werden. Eine übliche Aufzeichnungsform ist hierbei eine Strichliste in einer tabellarischen Form. Eine Tabelle ermöglicht

Farbe	
rot	
blau	
gelb	
grün	
violett	

ABBILDUNG 1: TABELLE (NEUBERT, 2019, S. 15)

eine strukturierte Zusammenstellung von Daten, die in Spalten und Zeilen eingeteilt sind. Die absolute Häufigkeit kann durch das Zählen der Striche jeder Merkmalsausprägung bestimmt werden. Es kann neben der absoluten Häufigkeit aber auch das Verhältnis der Merkmale zueinander analysiert werden. In der Primarstufe eignen sich Tabellen besonders, da Ergebnisse genau und ohne Datenverlust wiedergegeben werden können (Neubert, 2019, S. 14–15).

2.1.2. Diagramme

Eine weitere grafische Darstellungsform stellen Diagramme dar. Das Wort „Diagramm“ stammt aus dem Griechischen und bedeutet „Umriss“. Auf zweidimensionaler Ebene werden verschiedene Messgrößen dargestellt und in Verbindung zueinander gesetzt. Die Bezeichnung „Schaubild“ ist als Synonym für den Begriff „Diagramm“ nicht geeignet, da ein Schaubild für die grafische Kombination von Bildern, Symbolen, Textfeldern und Diagrammen steht. Ziel eines Diagramms ist es, Zahlen anschaulich darzustellen (Neubert, 2019, S. 15; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 44).

Laut Neubert (2019, S. 15) können Informationen, die in Diagrammen dargestellt werden, gegenüber tabellarischen Darstellungen besser im Kurzzeitgedächtnis gespeichert werden. Ein Nachteil von der Darstellung von Daten mit Diagrammen besteht jedoch darin, dass die Werte in Diagrammen teilweise nicht ganz genau eingezeichnet werden können und dadurch Teile der Daten verloren gehen können.

Die bekanntesten Arten von Diagrammen sind Streifen- und Kreisdiagramme. Streifendiagramme sind der Oberbegriff von Säulen- und Balkendiagrammen. Zur Vereinfachung kann im Volksschulbereich auf die Unterscheidung zwischen Säulen- und Balkendiagrammen verzichtet werden und nur der Begriff „Streifendiagramm“ verwendet werden. Bei einem Streifendiagramm werden die Merkmalsausprägungen streifenartig in einem Koordinatensystem dargestellt. Wie lange einer dieser Streifen ist, bestimmt die absolute Häufigkeit.

Durch diese Darstellung können die Häufigkeiten sehr schnell erfasst und verglichen werden. Werden die Streifen senkrecht angeordnet, wird die Visualisierung als Säulendiagramm bezeichnet und bei horizontaler Anordnung gilt der Begriff „Balkendiagramm“ (Neubert, 2019, S. 16; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 44).

Streifendiagramm zu Beispiel 1

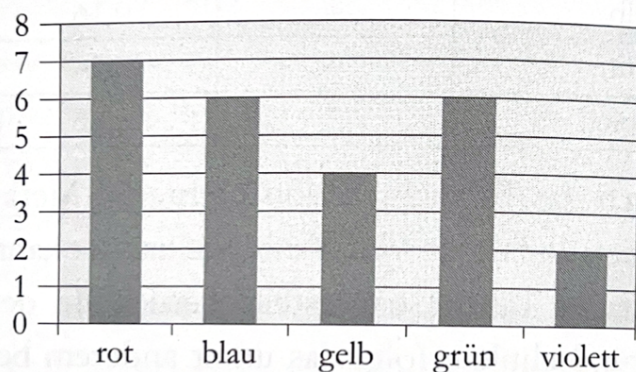


ABBILDUNG 2: STREIFENDIAGRAMM (NEUBERT, 2019, S. 16)

Eine weitere Art von Diagrammen ist das Kreisdiagramm, welches den Flächeninhalt zur grafischen Veranschaulichung nutzt. Durch die Unterteilung des Kreises in einzelne Sektoren können die jeweiligen Merkmalsausprägungen repräsentiert

werden. Der Unterschied zum Streifendiagramm liegt darin, dass bei einem Kreisdiagramm die relative Häufigkeit veranschaulicht wird. Durch die Darstellung der relativen Häufigkeit können die Einzelergebnisse in Beziehung zu der Gesamtzahl gesetzt werden (Neubert, 2019, S. 17–18).

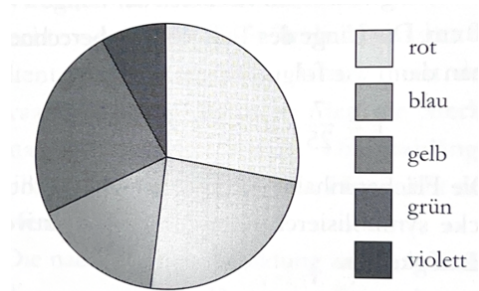


ABBILDUNG 3: KREISDIAGRAMM (NEUBERT, 2019, S. 17)

Es ist zudem möglich, die Merkmalsausprägungen mithilfe von Piktogrammen darzustellen. Bei sogenannten Piktogrammen werden die statistischen Daten mithilfe von Symbolen verdeutlicht, wobei je ein Symbol für eine Einheit steht. Zur Darstellung von Regentagen werden beispielsweise Regenwolken als Symbol verwendet. Da die Achse für die Merkmalsausprägung wegfällt, eignet sich diese Darstellungsform vor allem im Anfangsunterricht (Neubert, 2019, S. 18–19; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 45).

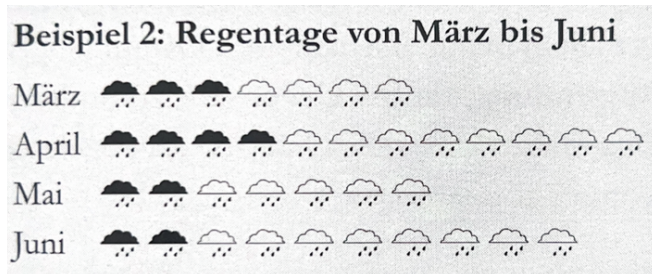


ABBILDUNG 4: DARSTELLUNG MIT PIKTOGRAMMEN (NEUBERT, 2019, S. 18)

2.1.3. Datenanalysekreislauf

Die Arbeit mit Daten wird von Wild und Pfannkuch (1999) in Form eines Kreislaufes („PPDAC“ cycle) dargestellt. Anhand dieses systematischen Ablaufes, der in fünf Schritten erfolgt, können Daten effizient bearbeitet werden. Die erste Komponente dieses Kreislaufes ist das **P**roblem. In dieser Phase geht es darum, die notwendigen Variablen zu bestimmen. In einem weiteren Schritt, der **P**lanungsphase, wird bestimmt, wie die relevanten Variablen erhoben werden können. In der **D**atenphase werden schließlich die Daten erhoben und in der **A**nalyse werden sie evaluiert und es können neue Hypothesen gebildet werden. Abschließend erfolgt in der Schlussfolgerungsphase (**C**onclusio) eine Interpretation der Ergebnisse und es können weitere Untersuchungsansätze entwickelt werden (Biehler & Engel, 2015, S. 225; Wild & Pfannkuch, 1999, S. 225–226).

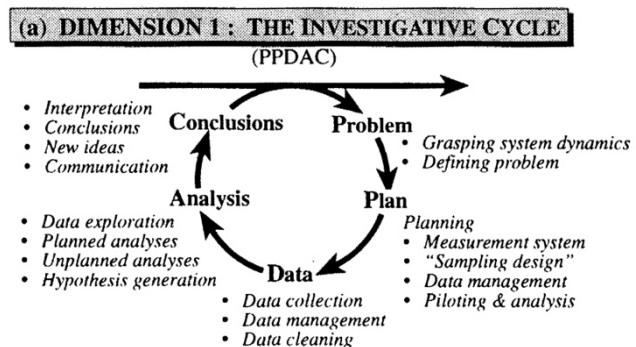


ABBILDUNG 5: DATENANALYSEKREISLAUF (WILD & PFANNKUCH, 1999, S. 225)

2.2. Wahrscheinlichkeit und Zufall

In alltäglichen Situationen begegnen Kinder dem Zufall oder hören Aussagen wie „Was für ein Zufall“, wenn eine Situation eintritt, die nicht erwartet wurde. Aber nicht nur bei Redewendungen kommen Kinder mit dem Zufall in Kontakt, sondern auch im Spiel fallen häufig die Begriffe „Glück“ oder „Pech“. Es steckt jedoch auch hinter dem Zufall eine bestimmte Systematik, welche als Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet wird. Diese zeigt, dass auch zufällige Situationen im Leben mathematisch berechnet werden können (Neubert, 2019, S. 26).

Ein Zufallsexperiment beschreibt einen realen Vorgang, der von drei Bedingungen abhängt. Das Experiment muss unter identischen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sein, die möglichen Ergebnisse müssen eindeutig bestimmbar sein und es darf nicht bereits im Vorhinein feststehen, wie das Experiment ausgeht. Vorgänge, wie beispielsweise das Drehen eines Glücksrades, ein Münzwurf oder das Würfeln mit Spielwürfeln, zählen zu Zufallsexperimenten. Als Ergebnisraum wird die Menge aller Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment vorkommen können, bezeichnet und jede einzelne Teilmenge als Ereignis. Diese Teilmenge erfüllt immer eine bestimmte Eigenschaft, wie beispielsweise jene, dass die gewürfelte Augenzahl gerade ist. Abgekürzt wird die Wahrscheinlichkeit in der Mathematik mit dem Buchstaben P. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl beim Würfeln mit einem Spielwürfel gerade ist, kann in folgendem Beispiel abgelesen werden:

$$P(\text{Die Augenzahl ist gerade}) = 0,5$$

Wenn ein Ereignis alle möglichen Ergebnisse von einem Ergebnisraum enthält, wird dies als sicheres Ereignis bezeichnet. Das Würfeln einer Zahl zwischen 1 und 6 mit einem Spielwürfel wäre beispielsweise ein sicheres Ereignis. Dass mit einem herkömmlichen Spielwürfel jedoch die Zahl 7 gewürfelt wird, ist unmöglich. Wenn ein Ereignis niemals eintreten kann, es also der leeren Menge gleicht, wird es als unmögliches Ereignis bezeichnet. In der Mathematik wird die Wahrscheinlichkeit als Maß definiert, das einer Menge von Ereignissen reelle Zahlen im Intervall von 0 bis 1 zuordnet, wobei bestimmte mathematische Bedingungen erfüllt werden müssen. Verschriftlicht werden können Wahrscheinlichkeiten durch Dezimalzahlen oder Brüche (Neubert, 2019, S. 27; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 222).

2.2.1. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff

Die allgemeine Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit wird **Laplace-Formel** genannt und geht auf den Mathematiker Laplace, der im 18. Jahrhundert lebte, zurück. Verwendet werden kann diese Formel, wenn die Ereignisse gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann berechnet werden, indem der Quotient aus der Anzahl der günstigen Ergebnisse (n) und der Anzahl der möglichen Ergebnisse (m) ermittelt wird (Neubert, 2019, S. 27–28; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 222).

$$P(A) = \frac{n}{m}$$

Wenn bei einer Wahrscheinlichkeit mit einem sehr sicheren Ereignis gerechnet wird, liegt die Wahrscheinlichkeit bei 1, wenn es aber unmöglich ist, dass ein Ereignis eintritt, ist das Ergebnis gleich 0. Demnach liegt die klassische Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 (Neubert, 2019, S. 28).

Der Mathematiker Tamás Varga gilt als einer der Ersten, der die Darstellung einer Wahrscheinlichkeit auf einer senkrechten Skala einführte, deren Wertebereich dem Intervall von 0 bis 1 entspricht (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 80).

2.3. Kombinatorik

„Für welche Eissorten entscheide ich mich?“ oder „Welche Kleidungsstücke ziehe ich heute an?“ sind alltägliche kombinatorische Fragestellungen, die den Schülerinnen und Schülern bereits im Volksschulalter begegnen. In der Primarstufe wird eine Grundlage für eine systematische und strukturierte Denkweise vermittelt, die durch abwechslungsreiche und spielerische Aufgabenformate auch im Kombinatorikunterricht gefördert werden kann. Zentrale Fragestellungen, die in der Kombinatorik bearbeitet werden, sind unter anderem wie viele Kombinationsmöglichkeiten es gibt und wie diese dargestellt werden können (Eichhorn, 2024, S. 5).

Franke und Ruwisch (2010) zählen kombinatorische Aufgaben zu Sachaufgaben. Ein wesentlicher Bestandteil der Kombinatorik ist das Bestimmen strukturierter Mengen, ohne diese zu zählen. Dafür muss zunächst festgestellt werden, welche Kombinationsmöglichkeiten es für eine bestimmte Anzahl an Elementen gibt und anschließend identifiziert werden, wie viele Möglichkeiten es für die Anordnung der Elemente gibt. Ziel der Bearbeitung kombinatorischer Aufgaben sollte nicht sein, eine passende Multiplikationssituation oder Formeln zu erarbeiten. Vielmehr sollen Kombinatorikaufgaben eingesetzt werden, um problemlösendes Denken zu entwickeln und eine systematische Arbeitsweise zu trainieren (Franke & Ruwisch, 2010, S. 44–45).

Die Kombinatorik befasst sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Auswahlen und Anordnungen von Elementen. Dabei sind insbesondere zwei Repräsentationsformen hervorzuheben. Zum einen das Auswählen in Form von Kombinationen sowie das Anordnen in Form von Variationen und auch als Sonderfall von Permutationen. Die Unterscheidung dieser kombinatorischen Figuren liegt wesentlich in der Bedeutung der Reihenfolge der Elemente. Während bei bestimmten Fragestellungen die Reihenfolge relevant ist, spielt sie bei Kombinationen keine Rolle. Unter Berücksichtigung der Möglichkeit mehrfacher Auswahl ergeben sich somit vier kombinatorische Figuren, die in Abbildung 6 in Bezug auf das Urnenmodell dargestellt sind (Herzog et al., 2017, S. 265; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171).

	Mit Berücksichtigung der Reihenfolge	Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
Ziehen mit Zurücklegen	Permutationen mit Wiederholung n^k	Kombinationen mit Wiederholung $\binom{n+k-1}{k}$
Ziehen ohne Zurücklegen	Permutationen ohne Wiederholung $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$	Kombinationen ohne Wiederholung $\binom{n}{k}$

ABBILDUNG 6: AUFGABENFORMATE KOMBINATORIK (SILL & KURTZMANN, 2019, S. 171)

Sill und Kurtzmann (2019) zeigen in ihrer Literatur jedoch auf, dass eine Unterscheidung im Primarstufenbereich nicht sinnvoll ist, da die Begriffe oftmals nicht fachlich korrekt eingesetzt werden und sich bei Kindern nicht leicht einprägen. Die Verwendung der Begrifflichkeiten ist außerdem nicht zwingend notwendig, da Kombinatorikaufgaben auch ohne den speziellen Bezeichnungen beschrieben werden können (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171–173).

Für das Lösen kombinatorischer Aufgaben gibt es unterschiedliche Lösungswege. Dazu zählt das unsystematische Ausprobieren, bei dem versucht wird, die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten zu entdecken. Materialien wie beispielsweise Steckwürfel, Figuren oder reale Gegenstände eignen sich für einen handlungsorientierten ersten Zugang zu Kombinatorik besonders gut. Dadurch, dass beim Ausprobieren Kombinationen übersehen werden können und es zu ungenauen Lösungen kommen kann, ist es in einem nächsten Schritt sinnvoll, systematischer vorzugehen. Wenn die Gegenstände durch ikonische Darstellungen ausgetauscht werden, kann sich dem Ergebnis durch eine Systematisierung angenähert werden. Durch einen zusätzlichen Abstraktionsprozess kann mithilfe von Tabellen oder Baumdiagrammen auf der symbolischen Ebene nach einem Lösungsweg geforscht werden (Apfler et al., 2023, S. 9).

2.3.1. Baumdiagramme

Das Baumdiagramm ist ein mögliches Hilfsmittel, das sowohl beim Lösen kombinatorischer Aufgaben als auch bei der Berechnung von mehrstufigen Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden kann. Im Bereich der Kombinatorik sind Baumdiagramme nur dann sinnvoll, wenn mit einer kleinen Anzahl an Möglichkeiten gearbeitet wird. Im Gegensatz dazu können Baumdiagramme bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen bei allen Aufgaben eingesetzt werden. Die

Verwendung eines Baumdiagramms unterstützt das systematische Probieren und orientiert sich demnach an den Bildungsstandards (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 199).

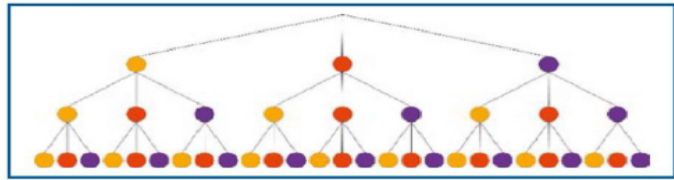


ABBILDUNG 7: DARSTELLUNG DER KOMBINATIONSMÖGLICHKEITEN (WEBER & OTT, 2022, S. 14)

Ein Baumdiagramm kann ab der 3. Klasse als Lösungshilfe angewendet werden, um einen strukturierten Lösungsprozess anzuregen und wie bei der Abbildung alle Kombinationsmöglichkeiten darzustellen. Neben Baumdiagrammen können die Kombinationsmöglichkeiten aber auch in der Form einer Tabelle oder Skizze dargestellt werden (Weber & Ott, 2022, S. 13–14).

2.3.2. Zählstrategien

Sill und Kurtzmann (2019) heben hervor, dass Lehrpersonen in der Lage sein sollten, die im Unterricht vorgesehenen kombinatorischen Aufgaben lösen zu können. Dies ist zum einen durch systematisches Probieren möglich, aber auch durch die Berechnung mithilfe von Zählstrategien oder dem allgemeinen Zählprinzip (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 174).

Ein besonderes Merkmal von kombinatorischen Aufgaben ist die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten. Es kann grundsätzlich zwischen drei Vorgehensweisen unterschieden werden. Dazu zählen das systematische Auflisten von Möglichkeiten, die Verwendung von Zählstrategien sowie die Nutzung kombinatorischer Formeln. Die Verwendung von Formeln zum Lösen kombinatorischer Aufgaben ist jedoch in der Primarstufe noch nicht vorgesehen. Bei der auflistenden und abzählenden Herangehensweise können mithilfe von Materialien oder schriftlich alle Möglichkeiten gefunden werden. Dabei kann sichergestellt werden, dass keine Kombinationsmöglichkeit fehlt oder doppelt vorkommt. Die systematische Auflistung bildet die Grundlage für die Verwendung von Zählstrategien (KIRA, n.d.).

Sill und Kurtzmann (2019) führen die drei fundamentalen Zählstrategien Summenregel, Produktregel und Quotientenregel an. Die Summenregel wird verwendet, wenn die Anzahl der Möglichkeiten zweier sich ausschließender Gruppen miteinander addiert werden. Die Produktregel wird auch als das allgemeine Zählprinzip bezeichnet. Die Voraussetzungen für dieses Zählprinzip werden in dem nächsten

Kapitel genauer beschrieben. Die Quotientenregel ist erforderlich, wenn bei der Anwendung der Produktregel alle Möglichkeiten mehrfach gezählt werden. Dabei wird die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch die Anzahl der Mehrfachzählungen dividiert (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 177–178).

Ob die im Primarstufenbereich vorkommenden Aufgaben mithilfe von Zählstrategien gelöst werden können, wird anhand einer Analyse, die in vier Schritten abläuft, festgestellt. Mithilfe dieser Orientierungsgrundlage kann überprüft werden, welche Aufgaben sich für die Bearbeitung in der Primarstufe eignen. Die Schritte werden mit Beispielen einer kombinatorischen Aufgabe ergänzt, bei der die Möglichkeiten der Zusammenstellung von Kleidungsstücken gesucht wird. Die zur Verfügung stehenden Kleidungsstücke sind eine weiße und eine schwarze Hose, die jeweils mit einem roten, grünen oder blauen T-Shirt kombiniert werden.

1. In einem ersten Schritt werden alle Entscheidungen aufgestellt, die in ihrem Ergebnis zu einer Kombinationsmöglichkeit führen. (Welche Hose wird ausgewählt? Welches T-Shirt wird ausgewählt?)
2. Es wird überprüft, ob die Entscheidung von der vorigen Entscheidung unabhängig ist. (Jede Hose kann mit jedem T-Shirt kombiniert werden, daher ist die zweite Entscheidung unabhängig von der ersten.)
3. Des Weiteren wird überprüft, ob eine Möglichkeit mehrfach vorkommt. (Alle Kombinationsmöglichkeiten kommen genau einmal vor.)
4. Die Ergebnisse werden in einer Antwort festgehalten. (Es gibt sechs Möglichkeiten die Kleidungsstücke zu kombinieren.)

Bei diesem Beispiel wäre die Verwendung der Produktregel möglich. Die passende Multiplikation beträgt zwei mal drei und kommt zu dem Produkt von sechs. Da die Anzahl der Elemente gering ist, eignet sich auch die Darstellung in einem Baumdiagramm, wie in der folgenden Abbildung gezeigt wird. Die Buchstaben sH und wH stehen dabei für schwarze Hose und weiße Hose und rS, gS und bS beschreiben ein rotes T-Shirt, ein grünes T-Shirt oder ein blaues T-Shirt (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 176–179).

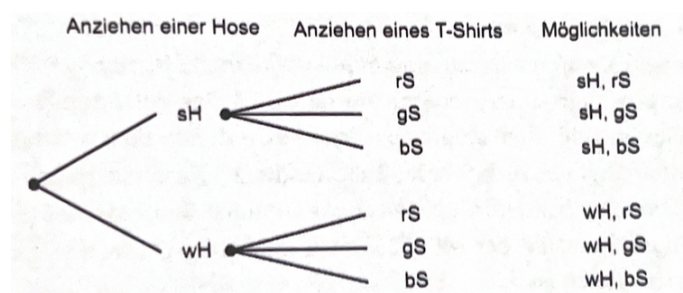


ABBILDUNG 8: BAUMDIAGRAMM ZUR DARSTELLUNG VON KOMBINATIONSMÖGLICHKEITEN (SILL & KURTZMANN, 2019, S.178)

2.3.3. Das allgemeine Zählprinzip

Die Kombinatorik befasst sich mit dem systematischen Abzählen der unterschiedlichen Kombinationsmöglichkeiten. Hierbei sollte das Ziel verfolgt werden, das Zählprinzip zu erfassen und zu verstehen. Wenn kombinatorische Aufgaben mit größeren Zahlen bearbeitet werden sollen, ist es nicht mehr möglich auf der enaktiven oder ikonischen Ebene zu arbeiten. Ein handelnder Lösungsweg oder das Aufzeichnen der Kombinationsmöglichkeiten stößt hierbei an seine Grenzen. Die enaktive und die ikonische Ebene sollen die Grundlage bilden, auf denen mit dem allgemeinen Zählprinzip auf symbolischer Ebene aufgebaut werden kann (Ulm, 2010, S. 9–10).

Das Zählprinzip bildet einen systematischen Lösungsweg, um die gesuchte Anzahl an Kombinationen zu ermitteln. Dabei müssen folgende Voraussetzungen beachtet werden:

- Die zur Ermittlung der Kombinationsmöglichkeiten notwendigen Entscheidungen stehen in einer festgelegten Reihenfolge.
- Es bestehen keine Mehrfachzählungen der Möglichkeiten.
- Die Entscheidungen über die Anzahl der Möglichkeiten sind voneinander unabhängig.

Sollten diese Aspekte zutreffen, kann die Anzahl der Möglichkeiten mit den einzelnen Positionen multipliziert werden (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 177).

3. Relevanz früher stochastischer Bildung

Da Kinder immer wieder in ihrem Alltag in Kontakt mit Wahrscheinlichkeit und Zufall kommen, ist es die Aufgabe der Schule, an diese Erfahrungen anzuknüpfen und diese systematisch aufzugreifen. Somit kann ein Verständnis für stochastische Gesetzmäßigkeiten aufgebaut werden. Stochastische Inhalte sind spätestens seit der Änderung im neuen Lehrplan ein fester Bestandteil des Unterrichts in der Primarstufe. Nicht nur der Mathematikunterricht bietet dafür Lernchancen, sondern auch in anderen Fächern können stochastische Fähigkeiten angewendet und erweitert werden. Neubert (2019) und auch Sill und Kurtzmann (2019) betonen in ihrer Literatur, dass die Entwicklung stochastischer Fähigkeiten Zeit braucht und sich daher die Erarbeitung im Spiralprinzip sehr gut eignet. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff beispielsweise soll immer wieder bearbeitet werden und nicht nach der einmaligen Einführung abgeschlossen sein. Demnach ist es wichtig, dass stochastische Inhalte anhand des Spiralprinzips von der ersten bis zur vierten Klasse immer wieder bearbeitet und auch mit anderen Unterrichtsfächern eng verknüpft werden. Besonders in der Volksschule begegnen die Kinder dieser Thematik mit einer höheren Motivation, wenn mit anschaulichem Material gearbeitet wird. Das große Interesse an Wahrscheinlichkeit, Kombinatorik oder der Arbeit mit Daten ist ein weiterer Grund für die Behandlung von stochastischen Inhalten im Volksschulalter. Dadurch, dass der Zufall und auch kombinatorische Aufgaben sehr spielerisch und handelnd eingeführt werden können, begegnen die Schülerinnen und Schüler dieser Thematik mit starker intrinsischer Motivation, was gleichzeitig die allgemeine Freude an der Mathematik steigern kann. Stochastische Aufgaben können auch bei leistungsschwächeren Kindern die positive Einstellung zum Mathematikunterricht fördern, da sie nur wenige Vorkenntnisse erfordern. Sie können differenziert angeboten werden und somit für leistungsschwächere Kinder einen guten Einstieg ermöglichen sowie leistungsstarke Kinder herausfordern (Neubert, 2019, S. 75–76; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 1–3; Ulm, 2010, S. 17).

3.1. Lehrplanbezug

Die Implementierung des neuen Lehrplans (BMBWF, 2023) in der Volksschule erfordert von Lehrpersonen eine verstärkte Auseinandersetzung mit den stochastischen Themenbereichen Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik.

Bereits ab der ersten Klasse sieht der Lehrplan der Volksschule eine Behandlung des Themas Stochastik vor. Zu dem inhaltlichen Kompetenzbereich Zahlen und Daten zählt unter anderem das Arbeiten mit Daten und die Entwicklung eines Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Als Darstellungsformen werden im Lehrplan Säulen- und Balkendiagramme, Tabellen und Strichlisten angeführt. Der Wechsel der Darstellungsformen von handelnder und bildlicher Ebene bis zur symbolischen Ebene bildet einen wesentlichen didaktischen Grundsatz, der für den Mathematikunterricht gilt. In der ersten Schulstufe sollen die Schülerinnen und Schüler dazu in der Lage sein, Daten zu erheben, die mit ihrer eigenen Lebenswelt in Bezug stehen und diese anhand von Strichlisten und Tabellen darzustellen und zu interpretieren. In der zweiten Klasse wird hinzugefügt, dass die erhobenen Daten mit Säulen- und Balkendiagrammen dargestellt und interpretiert werden. Ab der dritten Klasse werden im Lehrplan die Bereiche Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit ergänzt. Die Schülerinnen und Schüler können in der dritten Schulstufe einfache Kombinatorikaufgaben lösen und Wahrscheinlichkeiten beschreiben. Dabei werden die Begriffe „unmöglich“, „unwahrscheinlich“, „wahrscheinlich“ und „sicher“ erarbeitet. Auch die Wahrscheinlichkeiten sollen mit der Erfahrungswelt der Kinder verbunden sein. Zufallsexperimente und das Darstellen von absoluten Häufigkeiten ist in der vierten Klasse ein Bestandteil des Kompetenzbereiches Zahlen und Daten (BMBWF, 2023).

3.1.1. Problemlöseprozess

Zu den vier prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards zählt unter anderem auch das Problemlösen. Die prozessbezogene Kompetenz Problemlösen spielt im Umgang mit stochastischen Aufgaben eine zentrale Rolle, da sie das Erkennen mathematischer Zusammenhänge, das Aufstellen von Vermutungen und das Anwenden passender Lösungsstrategien umfasst. Im Vordergrund dieser Kompetenz steht vor allem der individuelle Denkweg der Kinder. Dieser kann nur angeregt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler eigenständige Problemlöseansätze entwickeln und keine Lösungswege von der Lehrperson vorgegeben werden. Die Kompetenz des Problemlösens zeichnet sich dadurch aus, dass gefundene Strategien auch hinterfragt werden und in einer ähnlichen Situation wieder angewendet werden können. Neben der Verwendung verschiedener Materialien können auch Skizzen oder systematisches Probieren zum Lösen einer Aufgabe führen. Eine problemorientierte Aufgabe verfügt immer über eine

Ausgangssituation und eine Zielsituation. Um zu der Zielsituation zu gelangen, müssen Schülerinnen und Schüler mathematische Kenntnisse anwenden und sich auf den Lösungsweg einlassen. (Franke & Ruwisch, 2010, S. 65; Kipman, 2015, S. 55).

Da Problemlösen viel mehr verlangt als das Abrufen von bereits gelernten Regeln und Wissen, müssen Schülerinnen und Schüler die Kompetenz des eigenständigen Denkens entwickeln. Dies ist nur möglich, wenn die Aufgaben offen gestaltet werden und die Lehrperson nur als Unterstützung dient (Ulm, 2010, S. 17).

3.2. Stochastische Vorstellungen

Kindern fällt es oftmals noch schwer, rational über Wahrscheinlichkeit nachzudenken, da es sich um ein sehr komplexes Konzept handelt. Folgende vier Aspekte gelten laut Bryant und Nunes (2012) als kognitive Anforderung, um den Zufall verstehen zu können. Erstens ist es eine Voraussetzung, den Zufall und dessen Konsequenzen, im alltäglichen Leben zu erkennen und so zu erfahren, dass nicht alle Ereignisse vorhersehbar sind. Des Weiteren ist es wichtig, alle möglichen Ereignisse und deren Abfolgen bestimmen zu können, um die Wahrscheinlichkeit für eine Situation zu verstehen. Dies ist nicht nur für die Berechnung wichtig, sondern auch für das Verständnis. Eine weitere Anforderung ist die Fähigkeit zum proportionalen Denken. Das bedeutet, dass Wahrscheinlichkeiten nur miteinander verglichen werden können, wenn die Proportionen übereinstimmen. Schlussendlich müssen auch die Beziehungen zwischen Ereignissen verstanden und es muss erkannt werden, ob eine Korrelation besteht oder ob die Ereignisse zufällig miteinander auftreten (Bryant & Nunes, 2012, S. 3–5).

Wie sich dieser Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriff eines Kindes entwickelt, wurde bereits in unterschiedlichen Untersuchungen erhoben. Martignon und Wassner (2005) führen dazu die Erkenntnisse von Piaget an. Für die Mathematikdidaktik sind unter anderem auch die von Piaget beschriebenen Entwicklungsphasen bedeutsam. Piaget nahm an, dass Kinder in der präoperationalen Phase (zwischen dem 3. und 7. Lebensjahr) den Unterschied zwischen vorhersehbaren und zufälligen Situationen nicht erkennen können und noch keinen ausgebildeten Wahrscheinlichkeitsbegriff besitzen. Als Begründung führte er unter anderem Experimente wie das Regentropfenexperiment sowie das bekannte Urnenexperiment an. Spätere Untersuchungen haben diese Ergebnisse jedoch teilweise relativiert. Auch wenn die

Vorstellungen der Kinder über Zufall und Wahrscheinlichkeit noch nicht vollständig ausgebildet sind, verfügen sie bereits über intuitive Zugänge zu stochastischen Zusammenhängen. Inzwischen besteht weitgehend Einigkeit darüber, dass sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff schrittweise entwickelt und als Entwicklungsphänomen verstanden werden muss (Martignon & Wassner, 2005, S. 208–209).

3.3. Aktuelle Forschungsergebnisse

Vor dem Hintergrund der genaueren Erfassung stochastischer Fähigkeiten von Kindern untersuchte Ulrike Kipman (2014), welche Unterrichtsmethoden sich für die Vermittlung stochastischer Inhalte in der Primarstufe besonders eignen. Zusätzlich wurden die Leistungen leistungsstarker Schülerinnen und Schüler im



ABBILDUNG 9: KI(D)S-KOFFER (KIPMAN, 2014, S. 47)

Teilbereich der Stochastik überprüft. Für diese Studie wurden verschiedene Unterrichtsmaterialien und der KI(D)s-Koffer entwickelt. Dieser Koffer beinhaltet verschiedene Materialien, wie beispielsweise Steckwürfel, Tierfiguren oder Kartenspiele. An der durchgeführten Studie nahmen 704 Schülerinnen und Schüler aus dem deutschsprachigen Raum teil, die zwischen 6 und 12 Jahre alt waren. Um die stochastischen Fähigkeiten zu erfassen, wurde zuerst mit allen teilnehmenden Kindern das KI(D)S-Quiz durchgeführt. Um die Einflüsse eines handlungsorientierten Unterrichts zu erheben, wurden die teilnehmenden Klassen in drei unterschiedliche Gruppen unterteilt. In einer der drei Gruppen wurden stochastische Inhalte in acht Unterrichtseinheiten handlungsorientiert unterrichtet. Zum Vergleich wurde eine Kontrollgruppe anhand von Arbeitsblättern unterrichtet und in einer zweiten Kontrollgruppe wurden keine stochastischen Inhalte unterrichtet. Nach den acht Unterrichtseinheiten wurde erneut das KI(D)S-Quiz durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass handlungsorientierter Unterricht zu einem signifikant größeren Lernzuwachs führt als der Unterricht mit Arbeitsblättern. Zusätzlich berichteten die

Lehrpersonen, dass Schülerinnen und Schüler, die handlungsorientiert unterrichtet wurden, mehr Freude am Unterricht zeigten (Kipman, 2014, S. 47–50).

In einer weiteren empirischen Studie untersuchte Ulrike Kipman (2015) die Problemlösekompetenz von Schülerinnen und Schülern im Zusammenhang mit kombinatorischen Aufgaben. Ziel dieser Untersuchung war es, herauszufinden, welche Strategien Kinder und Jugendliche beim Lösen kombinatorischer Aufgaben anwenden, inwiefern sie eine Transferleistung zu bereits Bekanntem herstellen können und ab welchem Alter richtige Lösungswege gefunden werden. Unter anderem wurde auch analysiert, welchen Einfluss die Faktoren Schulstufe, mathematische Fähigkeiten, Interesse an Mathematik, Geschlecht und sozialer Hintergrund auf die Problemlöseleistung haben. Getestet wurden 654 Kinder und Jugendliche im Alter von 5 bis 17 Jahren. Durchgeführt wurden die Testungen in Einzelsettings, in denen die getesteten Personen die Aufgaben anhand von konkretem Material lösen konnten. Das zur Verfügung gestellte Material waren Spielzeugeiskugeln, Autos und Tierfiguren. Im Vordergrund der Studie stand besonders das spielerische und handlungsorientierte Arbeiten mit diesen Materialien.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass Kinder im handlungsorientierten Umgang mit Materialien signifikant bessere Leistungen erzielten als bei einer vergleichbaren papierbasierten Bearbeitung ohne Material. Darüber hinaus zeigte sich ein klarer Zusammenhang zwischen dem Alter der Kinder und der erfolgreichen Lösung der Aufgabe. Mit zunehmendem Alter stieg die Wahrscheinlichkeit, dass die Testpersonen systematische Strategien einsetzten und Transferleistungen erbrachten. Kinder, die keine systematische Vorgehensweise zeigten, scheiterten bei komplexeren Aufgaben, weshalb es als besonders wichtig erachtet wird, gemeinsam mit Kindern Strategien zu erarbeiten und die Inhalte möglichst spielerisch und anschaulich zu gestalten. Die Ergebnisse der Studie von Ulrike Kipman verdeutlichen, wie wichtig ein spielerischer Ansatz ist, um die Problemlösekompetenz der Schülerinnen und Schüler im Volksschulalter zu fördern (Kipman, 2015, S. 58–67).

Im Rahmen einer empirischen Studie von Herzog et al. (2017) wurden die Lösungsquoten von 548 Schülerinnen und Schülern untersucht, welche sechs verschiedene kombinatorische Aufgabenstellungen bearbeiteten. Insbesondere wurde die Bearbeitungsweise analysiert und die entsprechenden Darstellungen untersucht. Neben der Darstellung wurden auch der Abstraktionsgrad und die Anwendung von

Makrostrategien erhoben. Aus dieser Studie geht hervor, dass nicht alle Kinder der dritten Klasse dazu in der Lage waren, die kombinatorischen Aufgaben ohne zusätzliche Anleitung lösen zu können. Durchschnittlich wurde nur ein Viertel der Punkte beim Lösen der kombinatorischen Aufgaben erreicht und ein Drittel der Schülerinnen und Schüler konnte keine der Aufgaben richtig beantworten. Im Gegensatz zum Abstraktionsgrad und zum Strategieeinsatz hatte die Darstellungsweise der Schülerinnen und Schüler nur einen geringen Einfluss auf den Lösungserfolg. Die in dieser Studie entstandenen Ergebnisse können als Grundlage für die weitere didaktische Vermittlung des Themas in der Volksschule dienen, denn sie zeigt um welchen anspruchsvollen Aufgabentyp es sich bei kombinatorischen Aufgaben handelt. Eine systematische Vorgehensweise erweist sich daher als sinnvoll (Herzog et al., 2017, S. 263–283; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171).

4. Umsetzung in der Primarstufe

In den folgenden Kapiteln wird gezeigt, wie die drei Gebiete Statistik, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik im Mathematikunterricht der Primarstufe eingesetzt werden können. Um in der Primarstufe ein grundlegendes Verständnis für stochastische Inhalte zu entwickeln, erfolgt die Vorgehensweise vorwiegend nach dem EIS-Prinzip. Zuerst schaffen die Lernenden eine Vorstellung anhand der handlungsbezogenen (enaktive) Ebene. Daraufhin folgt die bildliche (ikonische) Ebene und erst in einem dritten Schritt folgt die symbolische Ebene, welche sich auf die abstrakte Darstellung eines Begriffes bezieht (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 117).

4.1. Daten in der Primarstufe

Ziel der Arbeit mit Daten in der Primarstufe ist es, zunächst Daten zu erheben und darzustellen sowie vorgegebene Diagramme lesen, verstehen und analysieren zu können. Im folgenden Kapitel wird deutlich, wie Lernende zum handlungsorientierten Erstellen von Diagrammen und zur Auseinandersetzung mit Daten angeregt werden können (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 35; Ulm, 2010, S. 14).

4.1.1. Erfassen von Daten

Beim Sammeln von Daten werden gezielt bestimmte Eigenschaften von Personen oder Gegenständen erhoben, die für eine Fragestellung von Interesse sind. Besonders im Anfangsunterricht ist es sinnvoll, Daten zu erfassen, die einen direkten Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler haben, beispielsweise Informationen über die eigene Person oder zur Klasse. Zu Beginn eignen sich Fragestellungen, bei denen nur zwei Antwortmöglichkeiten zur Auswahl stehen. Um einen handlungsorientierten Zugang zu ermöglichen, kann sich jedes Kind für eines der zwei möglichen Ergebnisse entscheiden und enaktiv einen Steckwürfel oder ähnliches Material zu dem passenden Ergebnis legen. Da diese Art der Datenerhebung noch sehr unübersichtlich ist, ist der nächste Schritt für die Schülerinnen und

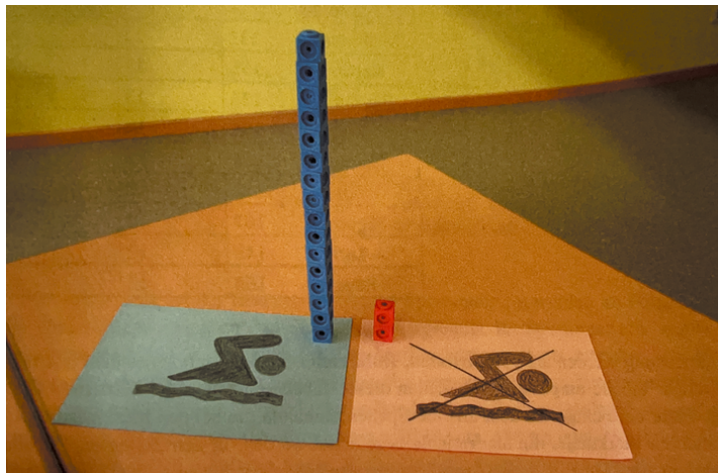


ABBILDUNG 10: DATENERHEBUNG MIT STECKWÜRFELN (SILL & KURTZMANN, 2019, S. 40)

Schüler einen strukturierteren Weg der Darstellung zu finden. Die Kinder können die Steckwürfel beispielsweise übereinander stecken. Dadurch kann schnell erfasst werden, welcher Wert größer ist (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 39).

Bei der Durchführung einer Befragung mit Schülerinnen und Schülern sollte darauf geachtet werden, dass eine passende Fragestellung gewählt wird. Wenn die Lernenden dazu angeregt werden eine eigene Fragestellung zu finden, beispielsweise bei einem Brainstorming, sollten Fragestellungen kritisch hinterfragt werden. Für sozialkritische Fragen wie zum Beispiel „Wen mag ich in der Klasse am liebsten“ sollen passende Argumente gesammelt werden, warum diese Fragestellung nicht für eine Umfrage geeignet sei. Laut Schipper et al. (2015) gilt es für Schülerinnen und Schüler bei der Erstellung einer Umfrage mehrere Punkte zu beachten. Ein wichtiger Aspekt ist, dass alle teilnehmenden Personen eine eindeutige Antwort geben können und mehrere Antwortmöglichkeiten zur Verfügung stehen. Die Schülerinnen und Schüler müssen außerdem entscheiden, welche Antwortmöglichkeiten sie anbieten und es muss im Vorfeld geklärt werden, ob Mehrfachauswahlen möglich sind (Schipper et al., 2015, S. 252–253).

Eine weitere sehr handlungsorientierte Methode der Datenerhebung bildet die „lebendige Statistik“ nach Biehler und Frischemeier (2015). Hierbei werden keine Materialien benötigt, sondern die Kinder stellen sich selbst als Merkmalsträger dar. Die Kinder können sich in einem ersten Sortierungsprozess eigenständig nach bestimmten Kriterien in Gruppen zusammenfinden. In einem weiteren Strukturierungsprozess stellen sich die Schülerinnen und Schüler schließlich strukturierter auf, um die Verteilung der Merkmale zu verdeutlichen. Das strukturierte Aufstellen in Reihen kann mit einem Streifendiagramm verglichen werden. Darüber hinaus wäre es auch möglich einen Kreis zu bilden und so ein Kreisdiagramm aus Menschen zu konstruieren. Schrittweise kann das Erstellen eines Streifendiagramms immer genauer werden und die zweite Achse, welche die Häufigkeit kennzeichnet, hinzugefügt werden (Biehler & Frischemeier, 2015, S. 5–6; Sill & Kurtzmann, 2019, S. 52).



ABBILDUNG 11: LEBENDIGE STATISTIK (SILL & KURTZMANN, 2019, S. 52)

Werden bei der Erstellung von Strichlisten Wimmelbilder oder bildnerische Darstellungen als Ausgangspunkt verwendet, ist es für Lernende schwierig, den Zweck einer Strichliste zu verstehen. Dadurch, dass die Daten in einem Wimmelbild nicht flüchtig sind, könnte auch die Anzahl der zu zählenden Objekte ermittelt und mit Zahlen dokumentiert werden. Wenn jedoch eine Befragung auf dem Schulhof durchgeführt wird, ist die Verwendung einer Strichliste unumgänglich. Besonders hilfreich erweist sich eine Strichliste, wenn mehrere Auswahlmöglichkeiten angegeben werden können (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 42).

4.1.2. Erstellen von Diagrammen

Das Streifendiagramm eignet sich als erste Art von Diagrammen sehr gut für den Anfangsunterricht. Wie auch bereits beim Erfassen von Daten beschrieben, sind Fragestellungen mit zwei Auswahlmöglichkeiten für die erste Einführung sinnvoll. Mögliche Fragestellungen, die mit ja oder nein beantwortet werden können, sind beispielsweise, ob die Kinder ein Instrument spielen oder ob sie eine andere Sprache sprechen. Erstellt werden können die entsprechenden Diagramme mit Steckwürfeln oder auch als lebendiges Diagramm. Auf einem Untergrund mit rechteckigen Fliesen kann ein lebendiges Diagramm besonders anschaulich dargestellt werden, indem jedes Kind auf genau einer Fliese steht. Die Fliesen können mit Kreide nachgezogen werden und so entstehen bereits die ersten Diagramme. Nachdem das Diagramm durch die Schülerinnen und Schüler auf enaktiver Ebene dargestellt wurde, kann der Übergang zur ikonischen Ebene, durch das Abzeichnen des Diagramms, erfolgen. Beim Zeichnen der ersten Diagramme im Heft kann zunächst mit einer waagrechten Achse begonnen werden, auf der die zwei Antwortmöglichkeiten beschriftet werden. Die Kästchen werden daraufhin senkrecht nach oben gezeichnet. Bei weiteren Befragungen können schließlich auch Fragestellungen mit mehreren Antwortmöglichkeiten durchgeführt werden, jedoch sollten diese Antwortmöglichkeiten von der Lehrperson vorgegeben sein und sich auf maximal sechs Möglichkeiten beschränken. Auch auf die Antwortmöglichkeit „Sonstige“ sollte zu Beginn verzichtet werden, um deutliche Ergebnisse zu erhalten. Wenn keine Antwortmöglichkeiten vorgegeben werden, könnte es passieren, dass bei der Frage „Was ist dein Lieblingstier?“ viele verschiedene Tiere genannt werden und somit das Diagramm an Aussagekraft verliert. Um dem entgegenzuwirken, ist es möglich die Frage zu „Welches dieser Tiere magst du am liebsten?“ umzuformulieren.

Zeitgleich mit dem Erstellen von Diagrammen sollte auch mit dem Lesen der Darstellungen begonnen werden. In vielen Schulbüchern wird dies meist nicht ausreichend erarbeitet, jedoch trägt besonders auch das Lesen von Diagrammen zu einem besseren Verständnis bei. Beim Betrachten von Diagrammen ist es zuerst wichtig, den Inhalt zu erfassen und den Aufbau zu verstehen. Erst danach ist es sinnvoll, die Daten aus dem Diagramm abzulesen. Diese zwei Stufen, die als „read the data“ und „read between the data“ bezeichnet werden, bilden die Grundlage für den weiteren Unterricht in höheren Schulen, wo darauf aufbauend auch statistische Kenngrößen ermittelt werden können (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 50–51).

4.1.3. Mustererkennung durch die Zusammenführung einzelner Daten

Ein für die Kinder sehr motivierender Zugang zum Erfassen von Daten und Erkennen von Mustern ist das Erfassen von Farbverteilungen von in kleinen Säckchen verpackten Gummibären. In solch einem Säckchen befinden sich meist um die zehn Gummibärchen in verschiedenen Farben. Im Unterricht ist es möglich zuerst damit zu beginnen, die Inhalte dieser Sackerl zu schätzen. Wenn in einem nächsten Schritt die Verpackungen geöffnet und unter den Lernenden verglichen werden, wird deutlich, dass sich die Häufigkeiten der Farben in jedem Sackerl unterscheiden. Es können Farben öfter auftreten, bestimmte Farben fehlen oder auch nur einmal vorkommen, denn die Verteilung der Farben ist in jeder Verpackung unterschiedlich. Würde an dieser Stelle nicht mehr weitergearbeitet werden, würden die Lernenden nur das Chaos im Kleinen entdecken, jedoch entgehen ihnen dabei wesentliche Erkenntnisse über Muster im Großen. Als weiteren Schritt empfiehlt es sich die gesammelten Daten zu kumulieren und so ein Muster sichtbar zu machen. Um dies visuell darstellen zu können und zugleich sicherzustellen, dass die Gummibärchen im Anschluss gegessen werden können, ohne von vielen Händen berührt zu werden, kann mit Steckwürfeln oder Karten als Repräsentanten gearbeitet werden. Die Daten werden zusammengezählt und es werden die Gummibärchen nach Farben sortiert, um ein fair verteiltes Ergebnis darstellen zu können. Auch wenn dieser Prozess viel Zeit in Anspruch nehmen kann, ist es für ein aussagekräftiges Endergebnis wichtig. Nach der Strukturierung und Kumulierung aller Gummibärchen wird deutlich, dass die Farben der Gummibärchen annähernd gleich verteilt sind. Auch wenn die absolute Häufigkeit durch das Abzählen der einzelnen Stücke noch nicht bei allen Farben gleich ist, stabilisiert sich die relative Häufigkeit. Sichtbar kann dies gemacht werden, indem alle

Farben mit ein bis zwei Stück auf die Säckchen wieder aufgeteilt werden (Eichler, 2020, S. 28–29).

Neben Gummibärchen können auch gewürfelte Augenzahlen erhoben und kumuliert werden. Auch mit Würfeln kann das Chaos im Kleinen und das Muster im Großen greifbar gemacht werden. Wenn der Würfel von einer Person zehn Mal gewürfelt wird, kann keine gerechte Verteilung der Augenzahlen angenommen werden, wenn jedoch die Würfelversuche für jede Augenzahl erhoben und mit den Würfelversuchen der anderen Schülerinnen und Schüler zusammengezählt werden, kann erkannt werden, dass die Würfelzahlen gerecht verteilt sind (Eichler, 2020, S. 30).

4.2. Wahrscheinlichkeit in der Primarstufe

Dadurch, dass Kinder in ihrem Umfeld immer wieder Erfahrungen in Bezug auf Wahrscheinlichkeiten sammeln, ist es in der Primarstufe sinnvoll, diesen Vorstellungen einen Raum zu geben und daran anzuknüpfen. Auf diese Weise ist es auch möglich, unreflektierte Vorstellungen zu erkennen und zu entkräften. Auch Frommeld und Spann (2022, S. 18) betonen, dass vor allem der handlungsorientierte Umgang mit Wahrscheinlichkeiten von großer Bedeutung ist.

Vor allem am Anfang soll das eigene Handeln der Kinder im Vordergrund stehen, wie beispielsweise mit Würfeln. Durch eigene Erfahrungen lernen die Kinder, dass manche Ereignisse häufiger oder seltener vorkommen als andere. Auf diesem empirischen Weg erhalten Lernende die Erkenntnis, dass erst mit zunehmender Anzahl an Versuchen eine zuverlässige Aussage über das Eintreten eines Merkmals getroffen werden kann. Dadurch, dass die Kinder immer wieder Erfahrungen mit Wahrscheinlichkeitsexperimenten machen, erkennen sie, dass es möglich ist, den Zufall zu berechnen (Hasemann et al., 2008, S. 153).

Im Mathematikunterricht gilt es in einem ersten Schritt, die Schülerinnen und Schüler an die Begriffe „unmöglich“, „möglich“ und „sicher“ heranzuführen, um Ereignisse besser einschätzen zu können. Eine Möglichkeit, die Bedeutung dieser Begriffe zu verdeutlichen, ist die Durchführung der Übung „Kann das stimmen?“. Dabei werden den Kindern verschiedene Situationen vorgegeben, in denen sie selbst entscheiden müssen, ob es sich um eine sichere, mögliche oder unmögliche Situation handelt. Nach einer selbstständigen Einschätzung werden die Ergebnisse miteinander reflektiert. Wenn die Kinder ein Verständnis gegenüber den Begriffen entwickelt

haben, können sie auch eigene Aussagen formulieren und die Situationen gegenseitig einschätzen (Frommeld & Spann, 2022, S. 18).

In dem Artikel von Frommeld und Spann (2022) wird hervorgehoben, wie gut sich Wahrscheinlichkeit im Unterricht der Primarstufe eignet, um der Heterogenität einer Klasse gerecht zu werden. Durch die Auseinandersetzung mit Wahrscheinlichkeiten wird unter anderem das logische Denken gefördert und auch die sprachliche Kompetenz verbessert (Frommeld & Spann, 2022, S. 20).

Jens Holger Lorenz (2006) betont, dass in der Primarstufe die Wahrscheinlichkeitstheorie noch nicht als Lehrgang eingeführt werden soll. Es sollen vielmehr Grundvorstellungen entwickelt werden und bereits gebildete Fehlvorstellungen relativiert werden. Dadurch, dass im Alltag Begriffe wie „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“ oder auch „zufällig“ häufig verwendet werden, entsteht die Vorstellung zukünftige Ereignisse vorhersagen zu können (Lorenz, 2006, S. 4–6).

Ein Fokus soll in der ersten und zweiten Klasse der Volksschule darauf gelegt werden, zufällige Ereignisse in alltäglichen Situationen identifizieren und Grundvorstellungen aufbauen zu können. Dafür können bereits erste Zufallsversuche durchgeführt werden, wie beispielsweise mit Münzen oder Würfeln. Zusätzlich können bereits in der Grundstufe 1 die Begriffe „sicher“, „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“ eingeführt werden. Ab der dritten Klasse können aufbauend auf die erste und zweite Klasse die Grundvorstellungen weiterentwickelt werden und es können Tabellen und Diagramme gezielt eingesetzt werden, um Ereignisse auf ihre Wahrscheinlichkeit zu überprüfen. Allgemein ist es wichtig, den Kindern Erfahrungen in verschiedenen Situationen in Bezug auf Zufall und Wahrscheinlichkeit zu ermöglichen. Besonders im Spiel lernen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit zufälligen Ereignissen und sie können hinterfragen, warum bestimmte Ereignisse häufiger und andere Ereignisse weniger häufig vorkommen. Allgemeine Ziele in der Arbeit mit Wahrscheinlichkeit sollten sein:

- zufällige Ereignisse beobachten
- Strukturen hinter häufig auftretenden und seltenen Ereignissen erkennen
- die auftretende Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse beurteilen können (Lorenz, 2006, S. 7)

4.2.1. Wahrscheinlichkeit auf einer Skala

Eine Möglichkeit, den Ausgang eines Ereignisses gegenständlich darzustellen, besteht in der Verwendung eines Lineals und einer Wäscheklammer. Dies ist auf die senkrechte Wahrscheinlichkeitsskala von Varga zurückzuführen, die bereits in den theoretischen Grundlagen von Wahrscheinlichkeit thematisiert wurde. Bei dieser Darstellung ist es von großer Bedeutung, dass das Lineal, welches als Skala dient, immer senkrecht gehalten wird. Dadurch können Probleme mit der Links-Rechts-Orientierung vermieden werden. Auch auf den weiteren Unterricht mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Sekundarstufe kann die senkrechte Vorstellung von Wahrscheinlichkeiten auf die y-Achse übertragen werden. Bei dieser enaktiven Darstellungsform der Wahrscheinlichkeitsskala entscheiden die Schülerinnen und Schüler, ob ein mögliches Ereignis mit sicherer Wahrscheinlichkeit zutrifft oder die Wahrscheinlichkeit eher geringer ist. Sollte ein Ereignis sehr sicher zutreffen, wird die Wäscheklammer an der oberen Kante des Lineals platziert und sollte das Ereignis unmöglich sein, wird die Wäscheklammer an das untere Ende des Lineals geklammert. Es ist somit möglich, die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler einer Klasse schnell zu vergleichen, indem die Lineale mit den Markierungen hochgehalten werden (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 81–83).

Die Wahrscheinlichkeitsskala kann auch durch einen Papierstreifen dargestellt werden, auf dem die Kinder mit Muggelsteinen ihre Einschätzung zur Wahrscheinlichkeit legen können (Frommeld & Spann, 2022, S. 18).

Auf der ikonischen Ebene reicht eine vertikale Strecke, auf der die Wahrscheinlichkeitsschätzung durch ein Kreuz dargestellt wird. Zwischen den Begriffen „sicher“ und „unsicher“ können außerdem die Bereiche „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“ beschriftet werden, die jeweils bis zur Mitte der Strecke gehen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 81–83).

4.2.2. Glücksspiele

Kinder kennen in vielen Fällen bereits einige Glücksspiele, wie beispielsweise das Glücksrad. Dieses kann von der Lehrperson einfach hergestellt werden und die Kinder zum handelnden Lernen anregen. Glücksräder weisen einen hohen Lebensweltbezug auf und können beim Aufbau grundlegender Vorstellungen und beim Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten helfen. Der mögliche Ausgang des Glücksrades beim Drehen kann durch die Begriffe „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ von den Lernenden

beschrieben werden. Somit können Schülerinnen und Schüler beim Drehen des Glücksrades handelnd Antworten auf Fragestellungen finden (Apfler et al., 2023, S. 8; Frommeld & Spann, 2022, S. 19).

Eine Möglichkeit, mit einem Glücksrad im Unterricht zu arbeiten, ist die Aufstellung verschiedener Gewinnregeln, wie beispielsweise der folgenden:

- Blau und Rot gewinnt
- Blau gewinnt
- Rot gewinnt
- Gelb und Grün gewinnt

Damit die Gewinnregeln zu dem Glücksrad passen, müssen die Felder auf dem Rad zuvor in verschiedene Farben unterteilt werden. In diesem Fall wird es unterteilt in ein gelbes Feld, ein grünes Feld, zwei blaue Felder und zwei rote Felder. Nachdem abgeklärt wurde, wie ein Glücksrad funktioniert und die Gewinnregeln mit den Kindern durchgegangen wurden, können die Kinder nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip zuerst eigenständig überlegen, welche dieser Gewinnregeln am ehesten zu einem Gewinn führen würde. In einer nächsten Phase werden die Erkenntnisse mit einem Partner ausgetauscht und anschließend auch im Plenum besprochen. Dabei kann auch die Wahrscheinlichkeitsskala verwendet werden (Frommeld & Spann, 2022, S. 18–19).

Auch eine Verknüpfung mit dem Erheben von Daten kann beim Drehen eines Glücksrades hergestellt werden. Die Ausgänge der Drehversuche können mithilfe einer Strichliste festgehalten werden (Apfler et al., 2023, S. 8).

4.2.3. Würfelspiele

Eine weitere spielerische Möglichkeit, sich mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff auseinanderzusetzen, sind Würfelspiele. Als Grundlage dafür müssen die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit Strichlisten sein, die Funktion von Tabellen verstehen und die Begriffe „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ sollten bereits richtig angewendet werden können. Im Zuge der Würfelspiele werden die Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit einer unterschiedlichen Anzahl an Würfeln erforscht. Zuerst ist es sinnvoll, Vermutungen darüber aufzustellen, welcher Summenwert beim Würfeln mit beispielsweise zwei Würfeln am häufigsten auftritt. Nach den ersten Vermutungen werden diese handelnd überprüft, indem fünfzigmal gewürfelt wird und anschließend alle Würfelsummen in einer Strichliste notiert werden.

Des Weiteren eignen sich Würfelspiele auch, um eine Verknüpfung mit der Kombinatorik herzustellen, indem Würfel in verschiedenen Farben verwendet werden. Wenn Würfel beispielsweise in den drei Farben blau, rot und gelb verwendet werden, können die Kinder grafisch untersuchen, welche Kombinationen der Würfel vorkommen können und dies systematisch darstellen. Um in einem letzten Schritt die Ergebnisse der Würfelsummen gut vergleichen zu können, eignet sich auch die Darstellung in einem Diagramm sehr gut. Dabei können die verschiedenen Gruppen der Kinder zu der Erkenntnis kommen, dass die Würfelsumme sieben beim Würfeln mit zwei Würfeln besonders häufig vorkommt (Frommeld & Spann, 2022, S. 19).

4.3. Kombinatorik in der Primarstufe

Der Einsatz kombinatorischer Aufgaben in der Primarstufe ermöglicht den Lernenden nicht nur Strukturen und Zusammenhänge zu entdecken, sondern fördert auch prozessbezogene Kompetenzen. Aufgaben im Bereich der Kombinatorik können in allen Jahrgangsstufen eingesetzt werden, denn Schülerinnen und Schüler erfahren unter anderem, dass verschiedene Lösungsprozesse zu einem Ergebnis führen können. Da der Lösungsprozess im Vordergrund der Bearbeitung kombinatorischer Aufgaben steht, wird eine entdeckende Grundhaltung entwickelt und die Lernenden erfahren, wie Probleme systematisch gelöst werden können. Eine weitere prozessbezogene Kompetenz, welche die Kinder erweitern können, ist das Darstellen. Die unterschiedlichen Darstellungsformen der Lernenden eignen sich gut zum Vergleichen und Reflektieren. Beim Austausch über die gefundenen Lösungswege im Plenum werden die Schülerinnen und Schüler zusätzlich zum mathematischen Kommunizieren angeregt (Weber & Ott, 2022, S. 12).

In vielen Lehrwerken der Primarstufe befinden sich kombinatorische Aufgaben mit wenig Praxisbezug. Von großer Bedeutung ist es, dass sich Aufgaben am Alltag des Kindes orientieren, um eindeutig interpretiert werden zu können. Sill und Kurtzmann (2019) schlagen daher folgende Aufgabenbeispiele vor, um einen möglichst hohen Lebensweltbezug zu gewährleisten:

- Menüauswahl
- Kleidung
- Zahlenschloss
- Gestaltung verschiedener Türme oder Flaggen

- Bestimmung der Reihenfolge von Tieren oder Personen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 174)

4.3.1. Heuristische Strategien

Eine mögliche Hilfestellung bei Problemlöseaufgaben sind heuristische Strategien, welche nach der Erarbeitung im Unterricht selbstständig eingesetzt werden können. Diese können bei der Lösungssuche unterstützend wirken, garantieren jedoch nicht, für jedes Problem eine Lösung zu finden. In der Literatur von Franke und Ruwisch (2010) wird zwischen heuristischen Verfahren und heuristischen Prinzipien unterschieden. Ein heuristisches Verfahren kann über den gesamten Bearbeitungszeitraum eingesetzt werden und ein heuristisches Prinzip wird dagegen nur an einzelnen Stellen des Prozesses genutzt (Franke & Ruwisch, 2010, S. 67).

Eine heuristische Strategie, auf die Kinder sehr häufig zurückgreifen, ist das Probieren. Während vorerst das unsystematische Probieren angewendet wird, entdecken Kinder immer mehr Systematik dahinter und gelangen schließlich zum systematischen Probieren. Diese Strategie kann vor allem in der Kombinatorik zu den gewünschten Zielsituationen führen, jedoch eignet sie sich nur bei weniger komplexen Aufgaben (Kipman, 2015, S. 56).

Um auch bereits das unsystematische Probieren mit Materialien zu dokumentieren, können beispielsweise auch Fotos von den Kombinationsmöglichkeiten gemacht werden. Werden die Fotos schließlich ausgedruckt und aufgelegt, kann auch anhand dieser eine Struktur erkennbar gemacht werden (Apfler et al., 2023, S. 10).

Eine weitere heuristische Strategie ist die Analogiebildung. Dabei wird auf Bekanntes zurückgegriffen und es wird versucht, Ähnlichkeiten mit bereits gelösten Aufgaben zu erkennen, um einen geeigneten Lösungsweg zu finden. Bei der Bearbeitung von Aufgaben überprüfen die Lernenden, ob die gefundenen Lösungsschritte einer bekannten Aufgabe auf das neue Problem übertragen werden können (Franke & Ruwisch, 2010, S. 68; Kipman, 2015, S. 56).

Auch im Spiel lernen Kinder, sich mit verschiedenen Situationen auseinanderzusetzen. Durch den Umgang mit unterschiedlichen Materialien oder Gegenständen entwickeln sie viele neue Fähigkeiten, um auftretende Probleme zu bewältigen. Dabei gewinnen sie durch Ausprobieren ein Verständnis für die zugrunde liegenden Zusammenhänge (Kipman, 2015, S. 57).

4.3.2. 5-Phasen-Modell

Bei der Bearbeitung von kombinatorischen Aufgaben bewährt sich laut Schipper et al. (2023) ein fünfphasiges Modell. In der ersten Phase steht das konkrete Handeln mit Materialien im Vordergrund und das anschließende Notieren der gefundenen Lösungen. Dadurch, dass Materialien oftmals begrenzt zur Verfügung stehen und somit nicht alle vorhandenen Möglichkeiten gelegt werden können, greifen viele Lernende eigenständig auf das Aufmalen oder Aufschreiben der Lösungen zurück. In der zweiten Phase werden die gefundenen Lösungen den anderen Kindern der Klasse vorgestellt und das Vorgehen wird beschrieben. Dadurch können Lösungsvarianten verglichen werden. Die dritte Phase dient der strukturierten Darstellung der Lösungen, um besser zu erkennen, ob alle vorhandenen Kombinationen gefunden wurden. Die dabei gemachten Überlegungen werden wiederum im Plenum besprochen, damit alle Lernenden davon profitieren können. Durch das Variieren der Aufgabenstellung können in der vierten Phase die damit verbundenen Veränderungen identifiziert werden. Dies ermöglicht es, eine bekannte Vorgehensweise auf die neue Aufgabe zu übertragen. In der fünften Phase wird erneut das Vorgehen reflektiert und es wird versucht, einen systematischen Lösungsweg zu finden, der sich auf andere Beispiele übertragen lässt (Schipper et al., 2023, S. 258–261).

4.3.3. Unterrichtsvorschläge

In diesem Kapitel werden weitere Unterrichtsvorschläge angeführt, wie kombinatorische Aufgaben bearbeitet werden können. Ein möglicher Ansatz sind Forscherkarteikarten, welche bereits ab der 1. Klasse eingesetzt werden können. Sie ermöglichen den Lernenden einen individuellen Zugang, da die Forscheraufgaben selbstständig erarbeitet werden können. Als Beispiel wird in diesem Fall eine fächerübergreifende Aufgabe für die Arbeit mit Forscherkarteikarten angeführt, wobei die Anordnungsmöglichkeiten von Blumen in einem Blumenbeet erhoben werden. Als gemeinsamer Einstieg wird zur Veranschaulichung ein leeres Blumenbeet mit verschiedenen Blumensorten angeboten. Dabei können auch Bildkärtchen der Blumensorten verwendet werden. Das präsentierte Material regt die Schülerinnen und Schüler an, die verschiedenen Bepflanzungsmöglichkeiten zuerst auszuprobieren, bevor sie sich mit den ersten Aufträgen auf den Karteikarten auseinandersetzen. Der erste Auftrag sollte eine geringe Anzahl an Möglichkeiten zulassen, um durch Ausprobieren mit dem verfügbaren Material zu einer Lösung zu kommen. Diese Art von Aufgabe bietet den Kindern einen differenzierten Lösungsprozess an, da

leistungsstarke Kinder einen systematischen Lösungsweg finden können und leistungsschwächere Kinder mithilfe des Materials durch Ausprobieren die Anzahl der Möglichkeiten finden. Die

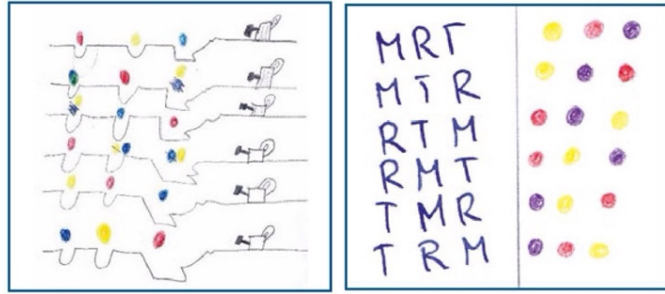


ABBILDUNG 12: SYSTEMATISCHE UND UNSYSTEMATISCHE DARSTELLUNG VON KOMBINATIONSMÖGLICHKEITEN (WEBER & OTT, 2022, S. 12)

strukturierte Vorgehensweise von

leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern wird durch den Übergang von der enaktiven Ebene zur ikonischen Ebene sichtbar, auf der sie die Lösungsmöglichkeiten systematisch darstellen. In der Abbildung 12 wird der Unterschied zwischen einer systematischen und einer unsystematischen Darstellung sichtbar (Weber & Ott, 2022, S. 13–15).

Als zusätzliche Unterstützung kann mit einem Lösungsprotokoll gearbeitet werden, um bei einem anschließenden Gespräch im Plenum über die Aufzeichnungen und Lösungswege diskutieren zu können. Die Aufzeichnungen können nach selbst erstellten Kriterien, wie beispielsweise dem zeitlichen Aufwand oder der Übersichtlichkeit, analysiert werden. Mit zunehmender Klassenstufe werden die Darstellungen abstrakter, da die Schülerinnen und Schüler ihre zunächst aufwendigen Zeichnungen zunehmend vereinfachen. Zur Weiterarbeit an dieser Aufgabenstellung bieten sich Veränderungen der Ausgangssituation an. Es können verschiedene Variablen verändert werden, wie beispielsweise die Anzahl der Blumen oder auch die Größe des Blumenbeets. Des Weiteren kann die wiederholte Verwendung einer Blumensorte erlaubt werden. Die Erhöhung der Anzahl der Blumen führt zu deutlich mehr Kombinationsmöglichkeiten, wobei eine strukturierte Vorgehensweise unumgänglich wird (Weber & Ott, 2022, S. 12–14).

Ein weiterer Unterrichtsvorschlag, bei dem mit einfach hergestellten Materialien ein handlungsorientierter Zugang geschaffen wird, ist das Bauen von Häusern aus zwei Teilen. Die Aufgabenstellung besteht für die Lernenden darin, aus selbst hergestellten Dreiecken und Quadraten unterschiedliche Häuser zu bauen. Auf enaktiver Ebene können bei dieser Aufgabe alle Kombinationsmöglichkeiten nebeneinander präsentiert werden. Dadurch, dass die Materialien aus quadratischem Papier einfach hergestellt werden, können alle Lernenden damit arbeiten. Die aus weißem Papier hergestellten

Bausteine werden zusätzlich mit dafür vorgegebenen Farben markiert. Bei der Durchführung dieses Beispiels in einem Unterrichtssetting konnten vorrangig unstrukturierte Vorgehensweisen beobachtet werden. Nur bei wenigen Kindern wurde ein strukturiertes Auflegen aller Möglichkeiten sichtbar. Dadurch, dass viele Kinder doppelte Kombinationen fanden oder Kombinationen übersahen, erkannten sie die Notwendigkeit einer strukturierten Vorgehensweise (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 191–192).



ABBILDUNG 13: BAUEN VON HÄUSERN (SILL & KURTZMANN, 2019, S. 191)

Um einen Übergang vom unstrukturierten zum strukturierten Probieren zu schaffen, bietet sich die Verwendung eines Streifenschiebers an. Dieser kann auch passend zu dem Aufgabenbeispiel mit den Häusern erstellt werden. Mithilfe einer Anleitung können die Schülerinnen und Schüler einen Streifenschieber aus Papier und dazu passende Streifen herstellen. Ein Streifen sollte die Dreiecke in den drei verschiedenen Farben enthalten und der andere Streifen die farbigen Quadrate. Nach einer Erklärung, wie damit alle Möglichkeiten gefunden werden können, werden die Möglichkeiten mit dem Streifenschieber eingestellt und daraufhin zeichnerisch dokumentiert. Die Dokumentation ist notwendig, da immer nur eine Kombination

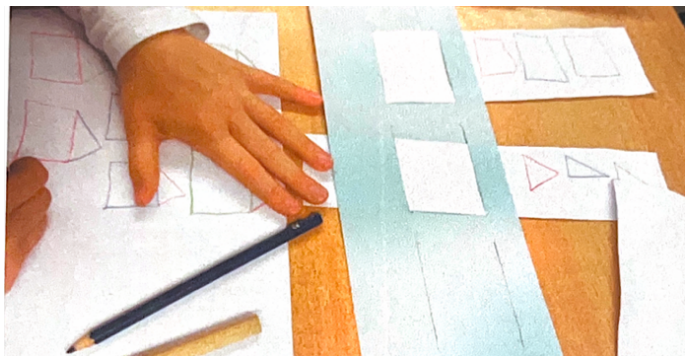


ABBILDUNG 14: STREIFENSCHIEBER (SILL & KURTZMANN, 2019, S. 193)

eingestellt werden kann. Bei der Durchführung im Unterricht konnten mithilfe des Streifenschiebers alle Möglichkeiten gefunden und systematisch dargestellt werden (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 193).

Bei der Erarbeitung von Baumdiagrammen zur Darstellung aller Kombinationsmöglichkeiten zeigten sich laut Sill und Kurtzmann (2019) in der Findung des ersten Verzweigungspunktes Schwierigkeiten. Um dieser Problematik entgegenzuwirken, können Entscheidungen mit Handlungen verdeutlicht werden. Wenn die Verzweigungen eines Baumdiagramms mithilfe von Schnüren und Papierkärtchen am Boden aufgelegt werden, können die Lernenden die Wege des Baumdiagramms abgehen und dabei die jeweils getroffene Entscheidung

verbalisieren. Eine Bearbeitung von Arbeitsblättern, die ein bereits vorgefertigtes Baumdiagramm darstellen, ist erst in einem weiteren Arbeitsschritt sinnvoll und sollte nicht zur Einführung eines solchen Diagramms dienen. Durch die gemeinsame Erstellung eines Baumdiagramms wird kein wesentlicher Bestandteil des Lösungsweges vorweggenommen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 200–201).

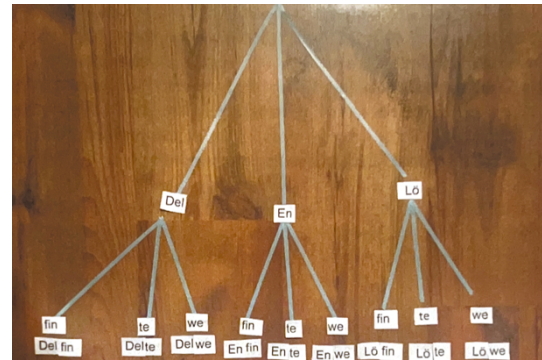


ABBILDUNG 15: GEGENSTÄNDLICHES BAUMDIAGRAMM ZUR BILDUNG VON TIERNAMEN (SILL & KURTZMANN, 2019, S. 201)

Auch in der Literatur von Ulrike Kipman (2019) werden Möglichkeiten angeführt, wie im Klassenraum spielerisch die Problemlösekompetenz verbessert werden kann. Eine Problemlöseaufgabe, bei der alle Kinder aktiviert werden, ist unter anderem das Sortieren von Bällen in Schachteln. Dafür werden vier Bälle in verschiedenen Farben und drei Schachteln benötigt. Die Aufgabe besteht darin, alle Anordnungsmöglichkeiten zu finden, wie die Bälle in die Schachteln verteilt werden können. Wenn in jede Schachtel ein Ball gelegt wird, bleibt bei jeder Möglichkeit ein Ball übrig. Mithilfe dieser Aufgabe kann das allgemeine Zählprinzip vermittelt werden (Kipman, 2019, S. 226).

5. Schulbuchanalyse

Die Schulbuchanalyse erfolgt anhand einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015). Laut Mayring wird eine qualitative Inhaltsanalyse unter anderem als eine Analyse von Kommunikationsmaterialien definiert. Demnach stehen bei dieser sozialwissenschaftlichen Methode kommunikative Mittel, wie beispielsweise Texte, Bilder und Ähnliches im Fokus der Analyse. Ein weiteres Merkmal einer qualitativen Inhaltsanalyse ist die systematische Vorgehensweise. Es werden demnach genaue Abläufe befolgt, um eine nachvollziehbare Analyse zu garantieren. Außerdem zeichnet sich eine Inhaltsanalyse dadurch aus, theoriebasiert vorzugehen, indem in die einzelnen Analyseschritte theoretische Überlegungen einbezogen werden (Mayring 2015, S. 12–13).

Ein systematisches Vorgehen kann durch den Einsatz von Kategorien als Analyseinstrument erfolgen. Zum einen können die Kategorien deduktiv entwickelt werden, indem dafür die Theorie herangezogen wird und zum anderen können sie induktiv mithilfe des zu analysierenden Materials erstellt werden. Im ersten Schritt wird nach Mayring das zu analysierende Material festgelegt und es werden Entstehungsbedingungen beschrieben. In einem weiteren Schritt werden die Richtung und die Fragestellungen der Analyse definiert und schließlich auch das Kategoriensystem festgelegt. Mayring unterscheidet bei der Interpretation zwischen drei Grundformen. Die erste Grundform wird als zusammenfassende Interpretation definiert. Dabei wird das analysierende Material so zusammengefasst, dass die wichtigsten Inhalte bestehen bleiben und somit das Material besser durchschaut werden kann. Bei der zweiten Grundform, der Explikation, wird ein einzelner Teil des Materials analysiert und bei der strukturierten Interpretation werden unter bestimmten Kriterien Aspekte aus dem Material herausgefiltert und eingeschätzt. Bei dem empirischen Forschungsdesign dieser Masterarbeit wird vor allem die dritte Grundform, die Strukturierung, herangezogen, da der Fokus dieser Schulbuchanalyse hauptsächlich auf stochastische Inhalte gerichtet ist. Abschließend werden die Ergebnisse zusammengestellt und hinsichtlich der Fragestellung interpretiert (Mayring, 2015, S. 62–67). Den allgemeinen Ablauf dieser qualitativen Inhaltsanalyse stellt Mayring folgendermaßen dar:

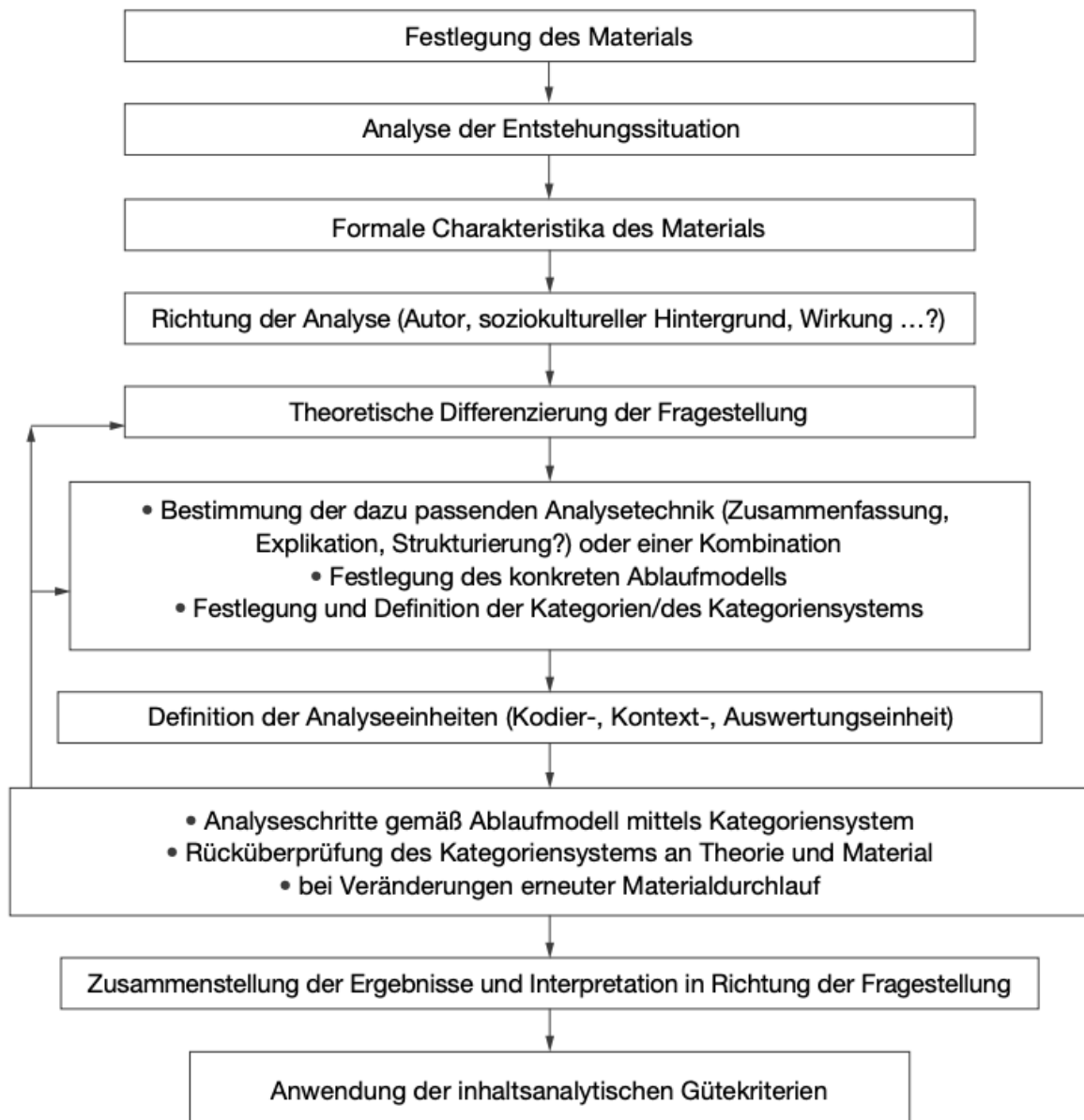


ABBILDUNG 16: ALLGEMEINES INHALTSANALYTISCHES ABLAUFMODELL (MAYRING, 2015, S. 62)

5.1. Auswahl der Schulbücher

Ausgewählt wurden für diese Schulbuchanalyse insgesamt fünf anerkannte Mathematikschulbücher, die in der Schulbuchliste 2025/26 gelistet sind. Die Schulbücher sind für die erste Grundstufe konzipiert und bestehen jeweils aus einem Lehrwerk für die erste Schulstufe und einem für die zweite Schulstufe. Die Auswahl bezieht sich auf folgende fünf Schulbücher:

Titel	Autorenteam	Verlag	Titelbild
EINS PLUS	David Wohlhart, Michael Scharnreitner und Elisa Wohlhart	Helbling Verlagsgesellschaft m.b.H.	
Lilli, Bakabu & du	Christina Konrad, Andrea Lindtner und Marlene Lindtner	Trauner Verlag + Buchservice GmbH	
Mathebus	Michael Lang und Nina Schnek	Veritas Verlags- und Handelsgesellschaft m.b.H. & Co OG	
MiniMax	Ursula Cermak, Barbara Holub, Heidi Novy und Nuschin Waldmann	Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG	
Flex und Flo	Brigitte Neuböck- Hubinger, Heidemarie Schoeller und Simone Venhoda	Westermann Jugend & Volk GmbH	

5.2. Richtung der Analyse und Differenzierung der Fragestellung

Als Ziel dieser Schulbuchanalyse gilt es, herauszufinden, mit welchen Zugängen in den unterschiedlichen Mathematikschulbüchern gearbeitet wird. Die Forschungsfragen dieser Masterarbeit lauten:

Welche Zugänge zu stochastischen Inhalten bieten Schulbücher der Primarstufe und inwiefern unterstützen diese einen handlungsorientierten Umgang?

Welche Materialien und Handlungsmöglichkeiten werden in den Aufgaben zur Unterstützung des stochastischen Lernens eingesetzt?

Spiegeln die Aufgaben zu stochastischen Inhalten die im Lehrplan geforderten Prinzipien des handlungsorientierten Lernens wider?

Anhand des Mathebuch-Checks (PIKAS, 2019) konnten bereits unterschiedliche Mathematikbücher analysiert werden, jedoch liegt in dieser Schulbuchanalyse der Fokus vor allem auf stochastischen Inhalten, da diese ein wesentlicher Bestandteil der allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind.

5.3. Analysekriterien

Um einen Vergleich der Schulbücher zu ermöglichen, werden die Analysekriterien in sechs Kategorien unterteilt. Zudem werden Leitfragen angeführt, um die Analysekriterien genauer auszuführen. Das Kategoriensystem wurde deduktiv auf Grundlage theoretischer Inhalte dieser Masterarbeit sowie des PIKAS-Mathebuch-Checks (PIKAS, 2019) entwickelt. Ergänzend wurden einzelne Unterkategorien induktiv aus den Schulbüchern herausdifferenziert, um Besonderheiten einzelner Lehrwerke angemessen abbilden zu können. Folgende Kategorien werden für diese Schulbuchanalyse herangezogen:

A	Aufbau und inhaltliche Struktur
Das Ziel dieser Kategorie ist es, zu erheben, welche stochastischen Inhalte in dem jeweiligen Schulbuch vorkommen und in welchem Umfang sie bearbeitet werden.	
Leitfragen:	
<ul style="list-style-type: none">• Welche stochastischen Themen werden im Schulbuch behandelt?• Wie häufig und an welchen Stellen treten die Themen der Stochastik auf?• Werden die Inhalte immer wieder aufgegriffen oder nur einmalig?	
B	Darstellungsformen
Bei diesem Analysekriterium stehen die Formen der Datenrepräsentation im Vordergrund.	
Leitfragen:	

- Welche Darstellungsformen werden verwendet?
- Wird eine Verbindung zwischen konkreten Materialien und symbolischen Darstellungen geschaffen?
- Werden verschiedene Repräsentationsformen miteinander verknüpft?

C Sprachliche Gestaltung

Unter diesem Kriterium werden die verwendeten Begriffe für stochastische Inhalte erhoben.

Leitfragen:

- Welche Begriffe werden zur Beschreibung von Daten und Darstellungen verwendet?
- Wie werden die Begriffe wahrscheinlich, unwahrscheinlich und unmöglich eingeführt?
- Werden die Fachbegriffe genauer erklärt?

D Materialien

Es wird überprüft, welche Materialien in den Schulbüchern eingesetzt werden, um die Inhalte zu veranschaulichen und einen handlungsorientierten Zugang zu ermöglichen.

Leitfragen:

- Welche Materialien werden zur Darstellung von Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik genutzt?
- Werden die Materialien als Werkzeug eingesetzt oder nur abgebildet?
- Unterstützen die Materialien die Entwicklung von konkretem zu abstraktem Denken?

E Alltagsbezug

Ziel dieser Kategorie ist es, zu analysieren, inwieweit die Aufgaben an die Lebenswelt der Kinder anknüpft.

Leitfrage:

- In welchen Kontexten werden die stochastischen Inhalte eingebettet?
- Sind diese Kontexte altersgerecht, motivierend und lebensnah gestaltet?

F	Aktivierung der Lernenden
<p>Hierbei wird der Aufgabencharakter analysiert und erhoben sowie geprüft, inwieweit die Lernenden aktiviert werden.</p> <p>Leitfragen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Fordern die Aufgaben zum eigenständigen Erheben, Darstellen und Interpretieren von Daten auf? • Gibt es Aufgabenformate, die zum Forschen und Entdecken anregen? • Werden die Lernenden dazu angeregt, Ergebnisse zu hinterfragen? • Werden den Kindern systematisch Zugänge angeboten oder werden Lösungen nur durch Probieren gefunden? 	

5.4. Analyse der ausgewählten Schulbücher

Anhand der erstellten Kategorien werden in diesem Abschnitt die ausgewählten Schulbücher analysiert. Eine zusammengefasste Übersicht über die analysierten Schulbücher ist dem Anhang dieser Masterarbeit zu entnehmen.

5.4.1. Eins Plus

Aufbau und Struktur

Das Lehrwerk *Eins Plus* besteht aus einem Erarbeitungsteil und einem Übungsteil, in denen parallel gearbeitet wird. Unterteilt sind die Bücher in jeweils vier Phasen und am Ende jeder Phase ist ein Wiederholungsabschnitt, in dem die gelernten Inhalte wiederholt werden.

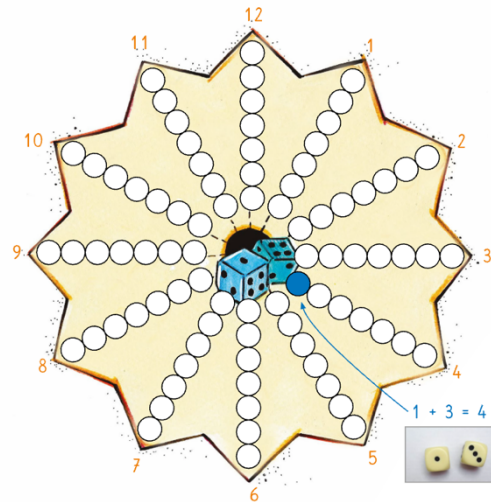
In dem untersuchten Lehrwerk werden die stochastischen Inhalte in der ersten Klasse überwiegend in dem Kapitel „Schaubilder“ verortet. Bereits auf den ersten Seiten werden Objekte mit Strichen gezählt und somit die Strichnotation eingeführt. In der zweiten Klasse findet man die Inhalte zum größten Teil in dem Kapitel „Diagramme“. Zu Beginn des Schuljahres werden hier auch die Inhalte der ersten Klasse wiederholt und dabei auch das Erheben von Daten wiederholt. Die Lernenden befassen sich somit bereits zu Beginn der zweiten Klasse mit dem Sammeln von Daten.

Die Inhalte kommen sowohl in der ersten Klasse als auch in der zweiten Klasse in der dritten Lernphase vor. Die Behandlung der Inhalte erfolgt punktuell, da die Inhalte nur

einmal ungefähr nach der Hälfte des Schuljahres behandelt werden und zusätzlich werden die Inhalte zu Beginn des Schuljahres wiederholt.

Im Vordergrund stehen in dem ersten Schuljahr das Sammeln von Daten und das Erstellen von Diagrammen. Außerdem wird im Bereich der Wahrscheinlichkeit ein Würfelexperiment durchgeführt. Kombinatorische Inhalte kommen weder im Erarbeitungsteil noch im Übungsteil vor. Im zweiten Schuljahr wird der Fokus wieder auf das Darstellen von Daten gerichtet und auch auf das Interpretieren von Diagrammen. Auch in der zweiten Klasse wird das Thema Wahrscheinlichkeit mit einer Würfelübung aufgegriffen. Nur in einer einzelnen Aufgabe wird ein kombinatorisches Beispiel bearbeitet.

- 1 Wirf zwei Würfel. Zähle die Würfelzahlen zusammen. Male für jedes Ergebnis einen Punkt an. Würfle so lange, bis alle Punkte in einem Strahl angemalt sind. Was fällt dir auf?



Besprich mit anderen Kindern:
Welche Zahl wurde am öftesten angemalt?
Gibt es eine Zahl, die niemals angemalt wurde?

ABBILDUNG 17: WÜRFELÜBUNG (EINS PLUS 1, ERARBEITUNGSTEIL, S. 101)

Insgesamt befinden sich in dem Lehrwerk der ersten Klasse 11 Aufgaben mit stochastischen Inhalten und in der zweiten Klasse setzen sich die Lernenden mit 17 stochastischen Aufgaben auseinander.

Darstellungsformen

Zur Darstellung von Daten nutzt das Schulbuch vorwiegend Säulendiagramme, Tabellen und Strichlisten. Als Einstieg werden Steckbausteine als Repräsentationsform verwendet, welche auf die ikonische Ebene übertragen werden, indem die Lernenden pro Steckbaustein ein Kästchen in ihrem Buch anmalen. Bei Umfragen werden die Daten mithilfe von Strichlisten notiert. In der zweiten Klasse kommen zu den Säulendiagrammen auch noch Balkendiagramme hinzu. Als Symbole für eine Dateneinheit werden unterschiedliche Formen verwendet, wie beispielsweise Punkte, Striche, Kästchen und auch Dreiecke. Auch bei der Würfelübung werden die gewürfelten Augenzahlen entweder mit dem Anmalen von Punkten festgehalten oder mit Strichlisten dokumentiert.

Sprachliche Gestaltung

Eingeführt werden Darstellungen von Daten in der ersten Klasse unter dem Begriff „Schaubilder“, zudem werden die Begriffe „Strichliste“ und „Umfrage“ verwendet. In der zweiten Klasse wird im nächsten Schritt der Begriff „Balkendiagramm“ verwendet sowie die Begriffe „am wenigsten“ und „am meisten“ zur Interpretation der Daten verwendet. Auf den darauffolgenden Seiten werden die Schaubilder auch als „Säulendiagramme“ oder „Diagramme“ benannt. Im Zuge der Würfelübung in der zweiten Klasse wird der Wortschatz mit den Begriffen „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“ und „unmöglich“ erweitert. Diese drei Begriffe werden jeweils einem glücklichen, einem neutralen und einem unglücklichen Smiley zugeordnet. Die neuen Begriffe werden immer in einem blauen Kästchen extra hervorgehoben.

Materialien

Zur Unterstützung des handelnden Lernens kommen Steckbausteine in der ersten Klasse zum Einsatz. Die Steckbausteine werden bildlich dargestellt und regen zum Nachstellen an. Ein konkreter Auftrag zur Erstellung einer ähnlichen Darstellung ist jedoch nicht enthalten. Bei dem Würfelexperiment werden die Würfel aktiv genutzt und

der Einsatz dieses Materials ermöglicht eine Verbindung vom Material zur ikonischen Darstellung. In der zweiten Klasse werden die Kinder immer wieder dazu angeregt, eigene Umfragen zu erstellen und mit Strichlisten festzuhalten.

 Jedes Kind aus der Klasse hat einen Stein zu seinem Lieblingstier gesteckt.
 Was siehst du?

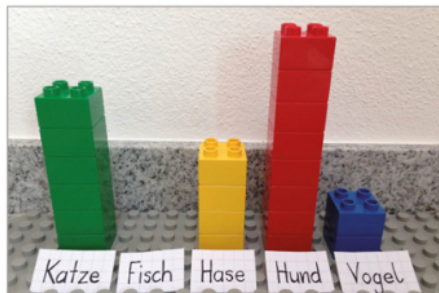


ABBILDUNG 18: DARSTELLUNG MIT STECKBAUSTEINEN (EINS PLUS 1, ERARBEITUNGSTEIL, S. 99)

Alltagsbezug

Die Aufgaben sind in alltagsnahe Kontexte eingebettet, da beispielsweise Umfragen zum Lieblingstier, Lieblingsfach, Lieblingspeise, Herbstaktivitäten und Lieblingsobst erstellt werden. Die Kontexte erscheinen sehr motivierend und es kann ein Bezug zur Lebenswelt der Kinder hergestellt werden. Außerdem werden die stochastischen Inhalte am Beginn jedes Kapitels mit Abenteuergeschichten eingeführt, welche einen zusammenhängenden Inhalt aufweisen. Die Würfelübung ist auch mit der Lebenswelt

der Kinder verbunden, da sie häufig bei Brettspielen mit Würfeln hantieren, jedoch ist die Übung nicht mit einer Geschichte verknüpft und dadurch ein wenig abstrakt.

Aktivierung der Lernenden

Die Aufgaben regen immer wieder zum genauen Betrachten der Schaubilder an und auch zum Erstellen eigener Umfragen in der Klasse. Dafür werden die Lernenden mit vorgefertigten Tabellen unterstützt. In der zweiten Klasse werden die Kinder auch dazu aufgefordert, Daten zu erheben und ein dazu passendes Säulendiagramm zu erstellen. Durch Richtig-oder-falsch-Fragen werden die Kinder beim Interpretieren der Diagramme unterstützt und das Textverständnis wird gefördert. Bei der kombinatorischen Übung, bei welcher ein Turm aus verschiedenen Bausteinen gebaut werden soll, gibt es keine unterstützenden Strategien, sondern die Lernenden müssen durch Ausprobieren zu einer Lösung kommen. Dabei werden die Kinder nicht dazu angeregt, den Turm selbst nachzubauen, sondern die Möglichkeiten sollen in das Heft gezeichnet werden.

5.4.2. Lilli, Bakabu & du

Aufbau und Struktur

Das Lehrwerk *Lilli, Bakabu & du* ist nach den Kompetenzbereichen in vier Bücher unterteilt. Die stochastischen Inhalte kommen überwiegend in dem Schulbuchteil „Abenteuer Knobeln, Muster und Daten“ vor. Thematisiert werden im ersten Schuljahr insbesondere das Erheben von Daten mit Säulendiagrammen, das Ablesen von Diagrammen, Kombinatorikaufgaben, Diagramme vergleichen und das Erstellen von Strichlisten. Die stochastischen Inhalte kommen in dem Schulbuchteil „Abenteuer Knobeln, Muster und Daten“ immer wieder vor und werden kontinuierlich aufgegriffen.

In der zweiten Klasse startet der Schulbuchteil „Abenteuer Knobeln, Muster und Daten“ mit dem Erheben von Daten und mit der Interpretation eines erstellten Säulendiagramms. Des Weiteren werden in diesem Schulbuchteil Informationen aus Tabellen entnommen, eigene Tabellen erstellt und kombinatorische Aufgaben mit einem Baumdiagramm dargestellt. Auch in der zweiten Klasse kommen die Inhalte mehrfach in diesem Schulbuch vor und werden immer wieder bearbeitet.

Insgesamt kommen in diesem Lehrwerk 10 Aufgaben mit stochastischen Inhalten in der ersten Klasse vor und in der zweiten Klasse beschäftigen sich 12 Aufgaben mit

diesen Inhalten. Die Thematik „Wahrscheinlichkeit und Zufall“ wird in keinem der Schulbücher eingebaut, dafür nimmt die Kombinatorik einen großen Teil ein.

Darstellungsformen

Zur Darstellung von Daten nutzt das Schulbuch vorwiegend Säulendiagramme. Dafür werden pro Merkmal entsprechend viele Kästchen angemalt. In der zweiten Klasse kommt hinzu, dass bei einem Säulendiagramm zwischen Mädchen und Buben unterschieden wird und somit zwei verschiedenfarbige Säulen pro Merkmal dargestellt sind.

Bei kombinatorischen Aufgaben werden passende Illustrationen angeboten, welche auch angemalt werden können, um verschiedene Kombinationen auszuprobieren. Zusätzlich wird als Darstellungsform in der Kombinatorik in diesem Schulbuch auch ein Baumdiagramm eingeführt. Mit dieser Darstellung kann systematisch eine Lösung gefunden werden.

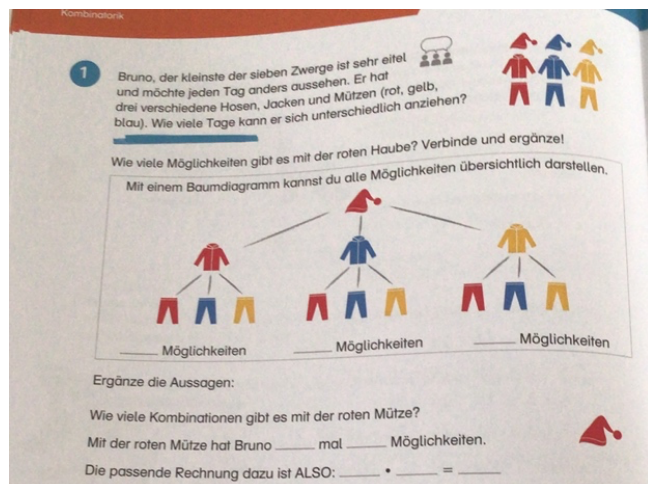


ABBILDUNG 19: BAUMDIAGRAMM (LILLI, BAKABU & DU 2, ABENTEUER KNOBELN, MUSTER UND DATEN, S. 34)

Sprachliche Gestaltung

Als Begrifflichkeit wird gleich von Beginn an das Wort „Diagramm“ verwendet und es werden damit vor allem Säulendiagramme bezeichnet. Bereits in der ersten Klasse wird auch der Begriff „Balkendiagramm“ verwendet, jedoch wird damit fälschlicherweise ein Säulendiagramm bezeichnet. Der Begriff Balkendiagramm wird außerdem nicht genauer erklärt. Als Begriff für das Erheben von Daten wird „Befragung“ verwendet. In der zweiten Klasse wird das Säulendiagramm eingeführt und in diesem Zusammenhang auch genauer erklärt. Es kommt erneut auch der Begriff „Balkendiagramm“ vor und dieser wird in diesem Zusammenhang mit einem Säulendiagramm

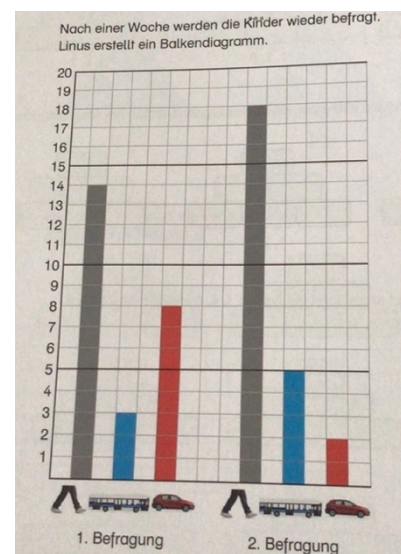


ABBILDUNG 20: BESCHRIFTUNG DIAGRAMM (LILLI, BAKABU & DU 1, ABENTEUER KNOBELN, MUSTER UND DATEN, S. 34)

verglichen. Dabei werden die Daten einer Haustier-Befragung in ein Säulendiagramm und in ein Balkendiagramm eingetragen und hinterfragt, in welchem der Diagramme die Ergebnisse übersichtlicher dargestellt seien. In der zweiten Klasse wird auch nicht mehr der Begriff „Befragung“ verwendet, sondern das Erheben von Daten wird nun als „Umfrage“ bezeichnet. In der Kombinatorik wird außerdem der Begriff „Baumdiagramm“ eingeführt und erklärt, dass damit alle Möglichkeiten übersichtlich dargestellt werden können.

Materialien

In dem Schulbuch werden keine Materialien verwendet, um das Erheben von Daten handlungsorientiert darzustellen. Nur bei einer kombinatorischen Aufgabe werden die Kinder dazu angeregt, mit drei verschiedenen Steckbausteinen unterschiedliche 3er-Türme zu bauen.

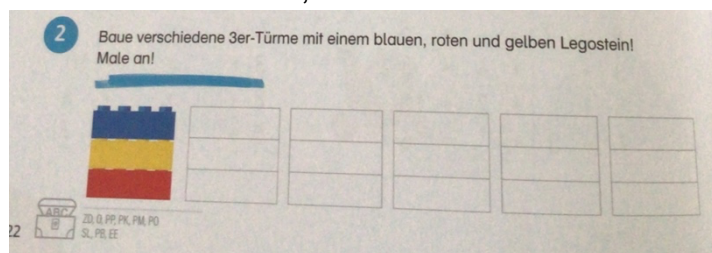


ABBILDUNG 21: KOMBINATORIKAUFGABE MIT STECKBAUSTEINEN (LILLI, BAKABU & DU 1, ABENTEUER KNOBELN, MUSTER UND DATEN, S. 34)

Alltagsbezug

Die Aufgaben sind in alltagsnahe Kontexte eingebunden, da beispielsweise ein Diagramm zum Schulweg erstellt wird oder bei einem Schulausflug ein Eisgeschäft besucht wird, in dem verschiedene Eiskugeln kombiniert werden können. Es kommen auch Aufgaben vor, die mit anderen mathematischen Themen verknüpft werden, wie zum Beispiel mit Formen oder mit der Uhrzeit. Zu Beginn des Schuljahres wird sowohl in der ersten als auch in der zweiten Klasse die Anzahl der auf einem abgebildeten Wimmelbild dargestellten Tiere erhoben und in einem Diagramm dargestellt. Dieser Kontext kann für Kinder sehr motivierend sein, jedoch wird hierbei der Zweck einer Strichliste nicht deutlich. Auch bei dem Ablesen von Tabellen wird mit Merkmalen der Kinder gearbeitet, wie beispielsweise dem Alter, dem Hobby oder der Lieblingsfarbe. Aus diesen Tabellen kann jedoch kein Diagramm erstellt werden, da diese Merkmale sehr unterschiedlich sind und sich daher eine Darstellung als Diagramm als nicht sehr aussagekräftig erweisen würde. Auch zur Lieblingsfarbe von Kindern sollen die Lernenden die passenden Kästchen anmalen, es wäre möglicherweise motivierender, wenn dabei die eigenen Lieblingsfarben erhoben werden würden.

Aktivierung der Lernenden

In der ersten Klasse regen die Aufgaben zum eigenständigen Erheben der Daten an, jedoch werden nur Gegenstände auf einem Bild abgezählt und es werden keine eigenen Befragungen durchgeführt. Es werden immer wieder Befragungen mit Diagrammen dargestellt und diese werden auch interpretiert, jedoch gibt es keinen Auftrag dazu, eine eigene Befragung zu erstellen. Zu den Diagrammen gibt es sehr viele Impulsfragen, welche die Kinder zum Sprechen anregen. Es werden in diesem Fall nicht alle Phasen des Datenanalysekreislaufes selbst ausprobiert. Am Ende der zweiten Klasse werden die Kinder dazu aufgefordert, ein eigenes Diagramm, basierend auf einer selbst erstellten Strichliste, zu erstellen.

Bei den kombinatorischen Aufgaben werden den Kindern mehrere Möglichkeiten angeboten, zu einer Lösung zu finden. Zum einen durch Anmalen der verschiedenen Möglichkeiten und zum anderen durch das eigene Erstellen eines Baumdiagramms. Das vorgefertigte Baumdiagramm kann Kinder dabei unterstützen, einen systematischen Lösungsweg zu finden. Die eigenständige Erstellung eines Baumdiagramms erweist sich jedoch als herausfordernd. Zum einen gibt es sehr viele verschiedene Kombinationsmöglichkeiten und zum anderen eignen sich Mittagsmenüs nicht sehr gut, um einfach gezeichnet zu werden. Zusätzlich werden Kinder dazu angeleitet passende Rechnungen zu den Baumdiagrammen zu finden und sich die Möglichkeiten anhand einer Multiplikation auszurechnen. Dies ist jedoch erst für die Sekundarstufe vorgesehen.

5.4.3. Mathebus

Aufbau und Struktur

Die Schulbuchteile des Lehrwerks *Mathebus* sind in unterschiedliche „Linien“ unterteilt. Es beinhaltet die Linie A mit allen Themen der Arithmetik, die Linie G mit geometrischen Inhalten, die Linie M zu den Maßeinheiten, die Linie S, in der Sachaufgaben im Mittelpunkt stehen und die Linie D, in der verschiedene Denksportaufgaben zum Knobeln anregen. Stochastische Inhalte werden in allen Linien thematisiert. Eingeführt werden zuerst Strichlisten in Zusammenhang mit dem Erheben von Daten und der Bestimmung der Anzahlen. Auch in Zusammenhang mit geometrischen Körpern oder mit Geldbeträgen kommen Strichlisten und Tabellen vor. Am Ende des „Fahrplanes“ werden in der ersten Klasse auch kombinatorische

Aufgaben eingeführt und es werden verschiedene Aufgaben dazu angeboten. In diesem Kapitel befindet sich auch ein Würfelexperiment.

Erst in der zweiten Klasse werden Diagramme eingeführt. Dabei werden gleich zu Beginn die verschiedenen Darstellungen in Strichliste, Säulendiagramm und Balkendiagramm miteinander verglichen. Es wird auch erneut das Würfelexperiment durchgeführt und es gibt einen Forscherauftrag zum Werfen einer Münze. In diesem Kapitel werden außerdem noch weitere Diagramme erstellt, Daten entnommen und es werden die Daten interpretiert. Die Lernenden erhalten auch Aufträge dazu, eigene Befragungen durchzuführen und die Daten passend darzustellen. Als abschließende Übung wird zu einer eigenen Umfrage auch ein Plakat erstellt, um die erhobenen Ergebnisse zu präsentieren. Neben Diagrammen wird in diesem Lehrwerk auch mit Schaubildern gearbeitet. In diesen Schaubildern repräsentieren verschiedene Piktogramme bestimmte Daten. Auch diese Schaubilder werden interpretiert. Bei den Denksportaufgaben in der Linie D gibt es auch in der zweiten Schulstufe verschiedene Übungen zur Kombinatorik und es werden erneut Säulendiagramme interpretiert und eigene Umfragen werden durchgeführt. Es zeigt sich, dass die Anteile der statistischen Inhalte in der zweiten Klasse sehr hoch sind und auch viele kombinatorische Übungen vorkommen, jedoch werden die Themen Zufall und Wahrscheinlichkeit eher weniger bearbeitet. Die stochastischen Inhalte kommen in der ersten Klasse bei 10 Aufgaben vor und in der zweiten Klasse ist das Thema Stochastik deutlich präsenter, da es im Zusammenhang mit 33 Aufgaben bearbeitet wird.

Darstellungsformen

Zur Visualisierung von Daten werden Strichlisten, Säulendiagramme, Balkendiagramme und Schaubilder verwendet. Bei einem Schaubild werden die Informationen anhand von Piktogrammen dargestellt. Dies kann hilfreich sein, aber auch bei Kindern zu Verständnisschwierigkeiten führen. In der Abbildung ist beispielsweise zu sehen, dass Familie Blanter mehr Fässer besitzt, die Saftmenge aber von Familie Huber größer ist. Bei der Einführung von Balkendiagrammen und Säulendiagrammen werden die verschiedenen Darstellungsformen bewusst miteinander verknüpft und verglichen. Zu

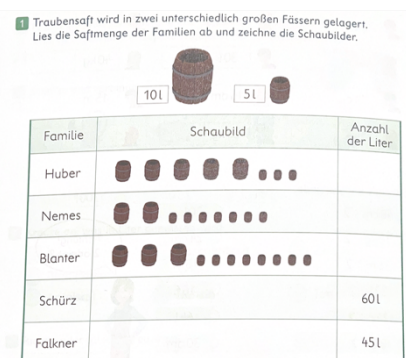


ABBILDUNG 22: DARSTELLUNG MIT PIKTOGRAMMEN (MATHEBUS 2, MAßEINHEITEN, GRÖßEN, S. 30)

Fehlinterpretationen könnte es jedoch kommen, da auf der passenden Illustration das Säulendiagramm und auch das Balkendiagramm verdreht dargestellt wurden, wie die Abbildung 23 zeigt. Beim Erstellen eigener Diagramme werden zur Unterstützung leere Diagramme angeboten, welche vervollständigt werden müssen. Bei kombinatorischen Aufgaben gibt es passende Symbole, die als Hilfestellung angemalt werden können, um die Anzahl der Möglichkeiten zu bestimmen.

Vergleiche die Darstellungen der Kinder und beantworte die Fragen.

- 3-mal
- 1-mal
- 2-mal
- 2-mal
- 4-mal
- 3-mal



- Welches Würfelbild wurde am meisten gewürfelt?
- Welches Würfelbild wurde am wenigsten gewürfelt?

ABBILDUNG 23: HILFESTELLUNG DIAGRAMME (MATHEBUS 2, ALLE RECHNEN, S. 112)

Sprachliche Gestaltung

Die Fachbegriffe werden bei der Einführung in einem farbigen Kästchen extra erklärt. Der Begriff „Befragung“ wird nicht explizit erklärt. Die Sprache ist kindgerecht und Aufträge werden sehr genau beschrieben. Kombinatorische Aufgaben werden als „Kombos“ bezeichnet und auch nachvollziehbar erläutert.

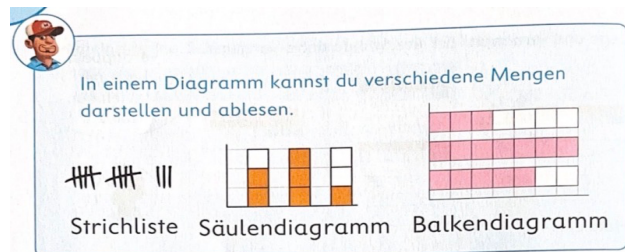


ABBILDUNG 24: BEGRIFFSERKLÄRUNG DIAGRAMME (MATHEBUS 2, ALLE RECHNEN, S. 112)

Materialien

Für das Erstellen einer Strichliste werden Gegenstände in der Umgebung gesucht und die Anzahl erhoben. Bei einer kombinatorischen Aufgabe werden rote und blaue Legeplättchen verwendet, um unterschiedliche Möglichkeiten zu finden. Auch mit verschiedenfarbigen Stiften und Spielfiguren wird versucht, unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten zu finden. Die Materialien fungieren dabei als zentrale Hilfestellung und es ist ein Übergang vom konkreten Material zu abstrakten Darstellungen erkennbar.

Bei dem Würfelexperiment wird ein Würfel 30-mal gewürfelt und anschließend die Augenzahl notiert, dieses Zufallsexperiment wird auch mit einer Münze durchgeführt.

Alltagsbezug

Die Aufgaben knüpfen an lebensnahe Themen wie Sportarten, Lieblingsessen, Eissorten oder Lieblingsfarben der Kinder an. Es gibt außerdem mehrere Aufgaben,

bei denen eigene Themen gefunden werden können, dazu gibt es passende Beispiele, aber es können auch frei gefundene Themen verwendet werden, was für Kinder besonders motivierend sein kann. Das gewählte Thema ermöglicht den Lernenden ihre eigenen Erfahrungen einzubringen und diese mit stochastischen Darstellungen zu verknüpfen. Bei den Schaubildern werden auch Themenbereiche herangezogen, die kaum Anknüpfungspunkte mit dem Alltag eines Schulkindes haben, wie zum Beispiel Saftvorräte oder das Anpflanzen neuer Bäume. Auch ein kombinatorisches Beispiel weist keinen besonders starken Bezug zur Lebenswelt der Kinder auf, da es dabei um das Anstoßen mit Kindersekt gefüllter Sektgläser geht.

Aktivierung der Lernenden

Bereits beim Erstellen einfacher Strichlisten werden die Schülerinnen und Schüler nicht nur dazu aufgefordert, Gegenstände auf einem Wimmelbild zu zählen, sondern erhalten auch den Forscherauftrag, Gegenstände in der Umgebung mit einer Strichliste zu erheben. Mit einer Lupe wird in diesem Lehrwerk gekennzeichnet, wenn es sich um einen Forscherauftrag handelt. Diese regen die Lernenden zum aktiven Denken an und motivieren sie zu eigenständigem Arbeiten. Bei einem weiteren Forscherauftrag durchlaufen die Lernenden den gesamten Datenanalysekreislauf. Die daraus gewonnenen Ergebnisse werden abschließend auch auf einem Plakat präsentiert.

Auch durch das aktive Ausprobieren mit Legeplättchen oder Stiften werden neue Möglichkeiten der Anordnung entdeckt. Dadurch, dass die gefundenen Möglichkeiten auch durch Anmalen dokumentiert werden, gelingt ein Übergang zwischen enaktiver und ikonischer Ebene. Als weitere Hilfestellungen, um alle Kombinationsmöglichkeiten zu finden, werden Skizzen angeführt.

Bei den Zufallsexperimenten mit dem Würfel oder der Münze werden die Lernenden dazu angeregt, die Daten selbstständig zu erheben und auch zu vergleichen, jedoch fehlt die reflektive Auseinandersetzung mit den Ergebnissen.

5.4.4. MiniMax

Aufbau und Struktur

Das Lehrwerk *MiniMax* besteht aus vier Teilen. Es gibt zwei Teile zu Zahlen und Rechnen, einen Geometrieteil und einen Größenteil. Die stochastischen Inhalte

befinden sich in den zwei Teilen „Zahlen und Rechnen“. Gleich zu Beginn der ersten Klasse werden Objekte aus einem Wimmelbild in Strichlisten dargestellt und auch im Zusammenhang mit der Kraft der Fünf werden Strichlisten erarbeitet. Erst am Ende des Schuljahres werden die Strichlisten wieder aufgegriffen und es werden Tabellen eingeführt. Es gibt mehrere Aufgaben zur Arbeit mit Tabellen und diese werden auch interpretiert. In der ersten Klasse werden noch keine kombinatorischen Inhalte oder Inhalte zur Wahrscheinlichkeit behandelt.

In der zweiten Klasse werden auch wieder am Ende des Schulbuches „Zahlen und Rechnen Teil B“ stochastische Inhalte erarbeitet. Es werden hier erstmals Säulendiagramme eingeführt und diese werden mit Tabellen verknüpft. Die Säulendiagramme werden erstellt und mit Leitfragen interpretiert. Im nächsten Schritt erhalten die Lernenden den Auftrag eine eigene Befragung zu erstellen und anhand dieser Daten ein eigenes Diagramm zu erstellen. Im gleichen Kapitel wird der Themenbereich Wahrscheinlichkeit thematisiert. Dafür werden Versuche mit Wendepfättchen durchgeführt und dokumentiert. Zusätzlich werden die Begriffe „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ erarbeitet und es werden Behauptungen dahingehend überprüft.

Die Anzahl der Aufgaben mit stochastischen Inhalten beträgt in der ersten Klasse 10 und auch in der zweiten Klasse werden 10 Aufgaben in diesem Bereich angeboten. Der Teilbereich der Kombinatorik wird in der Grundstufe 1 nicht aufgegriffen.

Darstellungsformen

Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Strichlisten kennengelernt haben, werden diese in Tabellen eingetragen und mit Piktogrammen veranschaulicht. Diese Tabellen erscheinen sehr übersichtlich. In der zweiten Klasse werden die Daten einer Fotobestellung nicht als Strichliste dargestellt, sondern zuerst als Bestellliste zum Ankreuzen und davon wird ein Säulendiagramm erstellt. Bei der Bestellung wurden auch manche Artikel mehrfach ausgewählt. Schließlich wird dieses Säulendiagramm auch noch mit einer Strichliste verknüpft. Die Darstellung der Schuhgrößen einer Klasse könnte für Kinder zu Verwechslungen führen, da für die Bezeichnungen der Schuhgrößen Zahlen verwendet werden und auch für die Anzahl der Kinder mit dieser Schuhgröße. Wenn eine Schuhgröße in einer Klasse nicht vorhanden ist, wird diese in dem Diagramm trotzdem dargestellt. Bei der Umfrage zur Sportart werden die

Ergebnisse in Mädchen und Buben unterteilt und extra dargestellt. Die Daten wurden bereits auch in der ersten Klasse bei der Tabelle zu den äußeren Merkmalen nach den Geschlechtern getrennt dargestellt.

Sprachliche Gestaltung

Die sprachliche Gestaltung entspricht weitgehend den fachlichen Grundlagen der Stochastik, da mit den Begriffen „Strichliste“, „Tabelle“ und „Säulendiagramm“ gearbeitet wird. Die Begriffe „Strichliste“ und „Umfrage“ werden anhand einer Illustration erklärt. Auch der Fachbegriff „Säulendiagramm“ wird kindgerecht mit der Formulierung erklärt, dass ein Kästchen für ein Kind steht. Für die Interpretation der Säulendiagramme oder Tabellen werden den Kindern Leitfragen angeboten, welche mit eigenen Fragen ergänzt werden können. Die Begriffe „Umfrage“ und „Befragung“ werden immer abwechselnd eingesetzt. Begriffe wie „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ werden auch mithilfe einer Illustration erklärt. Die angeführten Behauptungen sind klar formuliert und regen zum Nachdenken an.

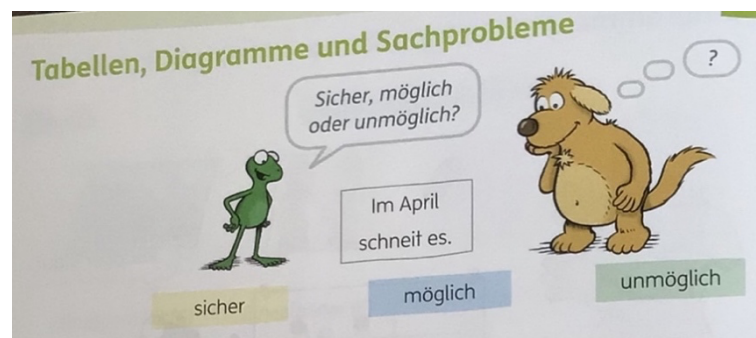


ABBILDUNG 25: BEGRIFFE WAHRSCHEINLICHKEIT (MINIMAX 2, ZAHLEN UND RECHNEN TEIL B, S. 74)

Materialien

Für das Erstellen von Diagrammen werden keine Materialien verwendet. Für die Durchführung des Wendepfättchen-Versuches kommen Wendepfättchen zum Einsatz, welche aktiv von den Lernenden genutzt werden.

Alltagsbezug

Die Aufgaben sind in lebensnahe Kontexte eingebettet, da beispielsweise eine Umfrage zu Orten, an denen die Kinder bereits waren, durchgeführt wird oder eine Tabelle zu Spielzeug dargestellt wird. Außerdem können sich die Kinder bei einer Tabelle zu äußeren Erscheinungsmerkmalen mit Ähnlichkeiten oder Unterschieden auseinandersetzen. Ein weiteres Beispiel, das einen sehr hohen Alltagsbezug aufweist, ist das Diagramm zur Fotobestellung. Dieser ausgewählte Kontext wirkt sehr

authentisch. Auch bei Themen wie Schuhgröße oder Sportarten kann jedes Kind einen Bezug zur eigenen Lebenswelt herstellen. Zudem ist das Werfen der Wendeplättchen vielen Kindern bekannt und wirkt motivierend.

Aktivierung der Lernenden

Die Aufgaben sind sehr klar strukturiert, wodurch ein eigenständiges Arbeiten ermöglicht wird. Die Kinder erhalten zudem eine offene Aufgabenstellung, eine eigene Tabelle zu den äußeren Merkmalen zu erstellen. Bei der Erstellung eines Säulendiagramms müssen die Lernenden zuerst pro Kind ein Kästchen anmalen. Anschließend werden die Schülerinnen und Schüler bei der Interpretation der Säulendiagramme dazu aufgefordert, eigene Fragen zu stellen. Bei der Erstellung eines Diagramms zur Schuhgröße der Kinder aus der Klasse, durchlaufen die Lernenden einmal den gesamten Ablauf einer Datenanalyse. Zuerst erheben die Kinder die Daten anhand einer Befragung und dokumentieren diese Daten, dann erstellen sie eigenständig dazu ein Diagramm. Abschließend wird das eigene Diagramm interpretiert und es werden eigene Fragen dafür erstellt.

Das Aufgabenformat zur Wahrscheinlichkeit, bei dem ein Wendeplättchen geworfen wird, fördert das explorative Lernen, da die Lernenden aktiv einen Versuch durchführen. Das Wendeplättchen wird dabei zehnmal hintereinander geworfen und es wird jeweils die Farbe dokumentiert, die geworfen wurde. Jeder Versuch wird drei Mal wiederholt und schließlich zusammengefasst. In einem weiteren Schritt werden die Ergebnisse mit den anderen Kindern der Klasse verglichen. Auch bei der Mathematisierung der Begriffe „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ werden die Lernenden dazu aufgefordert, eigene Behauptungen zu erstellen und diese den Begriffen zuzuordnen.

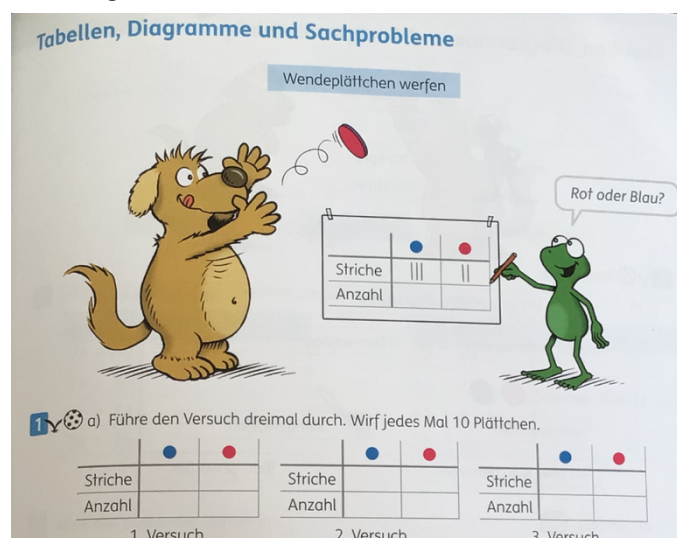


ABBILDUNG 26: WENDEPLÄTTCHEN WERFEN (MINIMAX 2, ZAHLEN UND RECHNEN TEIL B, S. 73)

5.4.5. Flex und Flo

Aufbau und Struktur

Das Lehrwerk *Flex und Flo* besteht aus vier Teilen. Diese sind nach den vier Themenbereichen „Sachrechnen und Größen“, „Zahlen erforschen“, „Rechnen Teil A und Teil B“ sowie „Geometrie“ unterteilt. In dem ersten Schuljahr führt das Lehrwerk das Erstellen von Strichlisten bereits gleich am Anfang ein und im Laufe des Buches werden die Strichlisten auch immer wieder wiederholt. In der Mitte des Schulbuches werden Tabellen eingeführt und gegen Ende des Schulbuchteiles „Sachrechnen und Größen“ befasst sich ein gesamtes Kapitel erneut mit stochastischen Inhalten. Nachdem in diesem Kapitel zwei Übungen zur Kombinatorik vorkommen, wird auch auf einer Seite Wahrscheinlichkeit und Statistik gemeinsam eingeführt. Dabei wird mit Diagrammen, Glücksrädern und Würfelversuchen gearbeitet. Auf der letzten Seite der Schulbuchteile befindet sich immer eine Zusammenfassung der wichtigsten Informationen. Auf dieser letzten Seite befindet sich erneut ein Diagramm.

In der zweiten Klasse werden bei Rechengeschichten immer wieder Daten aus Tabellen abgelesen. Gegen Ende des Schuljahres werden wieder in einem Kapitel Daten gesammelt und dargestellt. In Zusammenhang mit Liter wird ein Balkendiagramm interpretiert und es werden passende Fragen dazu erstellt. Im Bereich der Kombinatorik werden auch gegen Ende des Schuljahres verschiedene Kombinationsmöglichkeiten mithilfe des Ausmalens gefunden und passende Sachaufgaben angeboten. Zusätzlich befindet sich auf einer Knobel- und Entdeckerseite eine kombinatorische Aufgabe. Mithilfe einer Illustration werden verschiedene Zufallsexperimente dargestellt und mit passenden Aufgaben ergänzt. Erst am Ende des Buches werden erneut Diagramme thematisiert, indem Daten in ein Diagramm eingetragen werden und ein eigenes Diagramm erstellt wird.

Insgesamt führt das Lehrwerk *Flex und Flo* stochastische Inhalte schrittweise ein und die Struktur zeigt, dass der Bereich Stochastik einen festen Platz in den Schulbuchteilen eingenommen hat. In der ersten Klasse befassen sich 13 Aufgaben mit stochastischen Inhalten und in der zweiten Klasse befinden sich 20 stochastische Aufgaben in den Schulbuchteilen.

Darstellungsformen

Zur Dokumentation der Daten werden Strichlisten verwendet, die in tabellarischer Form notiert werden. Die Daten werden zu Beginn in einem Balkendiagramm visualisiert und in der zweiten Klasse kommt zusätzlich ein Säulendiagramm als Visualisierungsmöglichkeit hinzu. Das Balkendiagramm und das Säulendiagramm werden auf einer Doppelseite behandelt, wodurch der Unterschied gut sichtbar wird. Auch die Ergebnisse eines Zufallsexperimentes werden in einem Balkendiagramm dokumentiert. Um Kombinationsmöglichkeiten festzuhalten, werden Illustrationen angeboten, die nach den verschiedenen Kombinationen angemalt werden können. Auch bei den Zufallsexperimenten dienen bildliche Darstellungen der Verständlichkeit. Zu den Zufallsexperimenten zählen ein Glücksrad, verschiedene Urnenexperimente und ein Würfelexperiment.

Sprachliche Gestaltung

Die Begriffe „Säulendiagramm“ und „Balkendiagramm“ werden in der ersten Klasse nicht verwendet, stattdessen wird ein Balkendiagramm als „Streifenbild“ bezeichnet. Auch der Begriff „Zufall“ kommt in der Kapitelüberschrift vor, darauf wird jedoch nicht näher eingegangen. Auf der „Das merk ich mir!“-Seite befindet sich ein übersichtliches Streifenbild mit einer Erklärung, dass jeweils ein Strich aus der Strichliste für ein Kästchen steht. In der zweiten Klasse werden schließlich das Säulen- und das Balkendiagramm eingeführt und mit einer passenden Darstellung wieder auf der Seite „Das merke ich mir!“ festgehalten. Für die Interpretation von Diagrammen werden passende Fragestellungen angeführt. Nachdem die neuen Begriffe eingeführt wurden, wird gegen Ende des Schulbuches wieder der Begriff Streifenbild verwendet. Zum Themenbereich Wahrscheinlichkeit werden die Kinder angeregt, sich über ein Bild mit verschiedenen Zufallsexperimenten zu unterhalten. Dafür werden die Begrifflichkeiten „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ anhand von in Sprechblasen dargestellten Behauptungen eingeführt. Auch auf der letzten Seite werden die Begriffe nochmals zusammengefasst. Der Begriff „Umfrage“ oder „Befragung“ wurde nicht thematisiert.



ABBILDUNG 27: ZUSAMMENFASSUNG BEGRIFFE (FLEX UND FLO, SACHRECHNEN UND GRÖßEN, S. 48)

Materialien

Mithilfe eines Würfels werden eigene Würfelerggebnisse in eine Tabelle eingetragen und die Ergebnisse dieses Würfelexperimentes werden als Diagramm dargestellt. Zusätzlich gibt es einen Hinweis auf einer Seite zu Zufallsexperimenten, dass die Experimente nach Möglichkeit auch durchgeführt werden können. Mit einfachen Materialien könnten ein Glücksrad oder eine Urne hergestellt werden, um verschiedene Zufallsexperimente handelnd nachzuvollziehen.

Alltagsbezug

Die Aufgaben greifen Themen aus der Lebenswelt der Kinder auf, wie etwa Eissorten, Reihenfolge der Kinder beim Torwandschießen, Kombinationen von Kleidungsstücken oder die Haarfarben von Kindern. Es wird auch ein Balkendiagramm davon erstellt, ob Kinder einer Klasse mit der linken oder mit der rechten Hand schreiben. Zusätzlich erhalten die Schülerinnen und Schüler den Auftrag, ein eigenes Beispiel für ein Balkendiagramm zu finden, jedoch wird kein Thema angeboten, zu dem sie ein Diagramm erstellen könnten. Weitere Themen sind Farben von Autos oder der Wasserverbrauch an einem Tag. Der Alltagsbezug wirkt bei diesen Beispielen etwas weniger motivierend für Kinder. Einen zusätzlichen großen Themenbereich bildet ein Spielfest, zu dem es mehrere Aufgaben mit wahrscheinlichkeitsbezogenen Inhalten gibt. Außerdem werden Diagramme zu verkauften Lebensmitteln oder Getränken erstellt.

Aktivierung der Lernenden

Um Aufgaben selbstständig lösen zu können, werden bei Kombinationsaufgaben beispielsweise ausreichend Eiskugeln angeboten, die ausgemalt werden können, um die Anzahl der Möglichkeiten herauszufinden. Außerdem gibt es zwei kombinatorische Sachaufgaben, die mithilfe einer Skizze gelöst werden können. Nachdem die Anzahl der Möglichkeiten gefunden wurde, gibt es den Auftrag eine passende Malaufgabe zu dieser Sachaufgabe herauszufinden.

Durch das Würfeln und Eintragen der Ergebnisse werden die Lernenden aktiviert, Daten zu erheben und darzustellen. Dieses Beispiel würde sich auch dazu eignen, die Anzahl der gewürfelten Augenzahlen zu interpretieren, um ein Gefühl für den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu entwickeln. Die Schülerinnen und Schüler werden zudem aufgefordert, ein eigenes Beispiel für ein Balkendiagramm zu finden, jedoch werden die Kinder dabei nicht durch den gesamten Prozess geleitet, wodurch es schwierig sein könnte, selbstständig zu arbeiten. Die Kinder erhalten keine



ABBILDUNG 28: ZUFALLSEXPERIMENTE (FLEX UND FLO, SACHRECHNEN UND GRÖßEN, S. 43)

Informationen dazu, welche Daten sie erheben sollen und werden nicht durch Leitfragen unterstützt, ihr eigenes Diagramm zu analysieren. Erst bei einem weiteren Beispiel soll ein Diagramm zu den Lieblingsgetränken der Klasse erstellt werden, jedoch fehlt auch hier wieder eine genaue Anleitung. Es wird außerdem nicht angegeben, dass sich die Lieblingsgetränke auf die darüber angeführten Getränke beziehen sollen. Wenn jedes Kind sein Lieblingsgetränk nennen kann, wird die Darstellung durch die große Anzahl an unterschiedlichen Getränken unübersichtlich.

Besonders beim Ausprobieren der Zufallsexperimente können die Lernenden durch selbstständiges Entdecken viele Erfahrungen mit dem Zufall machen und somit die Begrifflichkeiten „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ handelnd nachvollziehen.

5.5. Ergebnisse

Im Rahmen des empirischen Teils dieser Masterarbeit wurden fünf Schulbücher der Grundstufe 1 hinsichtlich der Umsetzung von stochastischen Inhalten untersucht. Die Analyse zeigte deutliche Unterschiede in der thematischen Gewichtung und der Umsetzung. Der Bereich Statistik nimmt in allen Lehrwerken den größten Raum ein, während die Themen Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik unterschiedlich stark ausgeprägt sind.

Aufbau und Struktur

Die Bearbeitung von stochastischen Inhalten erfolgt in allen Lehrwerken, jedoch in unterschiedlichem Ausmaß. Während die Lehrwerke *Lilli, Bakabu & du*, *Mathebus* und *Flex und Flo* die Thematik über beide Schuljahre hinweg immer wieder aufgreifen, behandeln *Eins Plus* und *MiniMax* die Inhalte zusammengefasst in einem Kapitel meist gegen Mitte oder Ende des Schuljahres. Während *Lilli, Bakabu & du* regelmäßig kombinatorische Aufgaben integriert, behandelt *Eins Plus* diesen Bereich nur am Rande. Das Thema Wahrscheinlichkeit wird lediglich in den Schulbüchern *Eins Plus*, *Mathebus*, *MiniMax* und *Flex und Flo* behandelt, meistens in der Form von einfachen Würfel- oder Münzexperimenten.

Darstellungsformen

Strichlisten, Tabellen und Säulendiagramme sind in allen Lehrwerken von zentraler Bedeutung. Auch das Balkendiagramm wird in vier der Schulbücher eingeführt. Zusätzlich werden in *Flex und Flo* und *Mathebus* auch Darstellungen mit Piktogrammen oder Schaubildern angeboten. Lediglich in dem Lehrwerk *Lilli, Bakabu & du* wird ein systematisches Vorgehen beim Finden aller Kombinationsmöglichkeiten durch ein Baumdiagramm unterstützt.

Sprachliche Gestaltung

Die Fachbegriffe werden grundsätzlich in allen Lehrwerken fachlich korrekt und kindgerecht eingeführt, nur in *Lilli, Bakabu & du* wird einmal ein Säulendiagramm fälschlicherweise als Balkendiagramm bezeichnet. Die Einführung der neuen Begrifflichkeiten erfolgt meist durch Hervorhebungen oder Informationskästchen. Die Begriffe zur Wahrscheinlichkeit („sicher“, „möglich“ und „unmöglich“) werden nur in den drei Lehrwerken, *Eins Plus*, *MiniMax* und *Flex und Flo*, explizit eingeführt.

Material

Bei der Einführung von Daten werden kaum Materialien eingesetzt, die einen handlungsorientierten Unterricht ermöglichen. Nur das Lehrwerk *Eins Plus* bietet eine Möglichkeit mit Steckbausteinen an, um Daten auf der enaktiven Ebene darzustellen. *Mathebus* zeigt insgesamt den höchsten Grad an Handlungsorientierung und einen klar erkennbaren Übergang von der enaktiven zur ikonischen Ebene. Im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsexperimenten werden häufig Würfel und Wendepfättchen oder Münzen eingesetzt. Am häufigsten werden Materialien im kombinatorischen Bereich eingesetzt, diese reichen von Stiften und Bausteinen in unterschiedlichen Farben bis zu Spielfiguren.

Alltagsbezug

In allen Schulbüchern wird versucht, einen alltagsnahen Kontext zu schaffen. Dies gelingt vor allem mit Umfragen zu den eigenen Vorlieben, wie beispielsweise Lieblingssport, Lieblingseisorte oder Freizeitaktivitäten oder auch zu eigenen äußeren Merkmalen wie beispielsweise der Haarfarbe.

Aktivierung der Lernenden

In allen Lehrwerken setzen sich die Lernenden aktiv mit Daten auseinander, jedoch in unterschiedlicher Intensität. Während *Eins Plus*, *Mathebus* und *MiniMax* den vollständigen Datenanalysekreislauf durchlaufen, einschließlich selbst durchgeführter Befragungen und Interpretation der Daten, werden bei *Flex und Flo* nur einzelne Schritte eigenständig durchgeführt. *Lilli, Bakabu & du* setzt den Fokus verstärkt auf die Interpretation und Darstellung von Daten, verzichtet jedoch weitgehend auf eigenständige Erhebungen.

5.6. Diskussion

Die Analyse der fünf Lehrwerke zeigt, dass stochastische Inhalte in allen untersuchten Schulbüchern verankert sind und die Inhalte wiederholt aufgegriffen werden. Dadurch lässt sich grundsätzlich feststellen, dass alle Lehrwerke dem Spiralprinzip folgen. Während *Lilli, Bakabu & du*, *Mathebus* sowie *Flex und Flo* stochastische Inhalte mehrfach über das Schuljahr verteilt aufgreifen, werden diese Themen in *Eins Plus* und *MiniMax* eher blockweise in einzelnen Kapiteln behandelt. Aus didaktischer Sicht erscheint eine kontinuierliche Auseinandersetzung besonders günstig, um tragfähige Vorstellungen aufzubauen. Damit folgen die Ergebnisse den Forderungen von Neubert (2019, S. 75–76) und Sill und Kurtzmann (2019, S. 1–3) stochastische Inhalte nach dem Spiralprinzip zu behandeln, um ein nachhaltiges Verständnis zu entwickeln.

Hinsichtlich der Interpretation von Daten zeigt sich, dass mehrere Lehrwerke Leitfragen einsetzen, um die Lernenden beim Lesen und Analysieren von Diagrammen zu unterstützen. Diese Form der Unterstützung ist didaktisch besonders relevant, da sie über ein rein oberflächliches Ablesen hinausführt. Die Schülerinnen und Schüler werden dadurch angeregt, Schlussfolgerungen zu ziehen. Diese Fragen unterstützen die Vorgehensweise „read between the data“, wie sie von Sill und Kurtzmann (2019, S. 50–51) beschrieben wird, da somit auch Informationen beachtet werden, die nicht auf den ersten Blick im Diagramm sichtbar sind.

Grundsätzlich bemühen sich alle Lehrwerke um eine kindgerechte Einführung zentraler Begriffe. Dennoch zeigen sich hier Unterschiede in der fachlichen Genauigkeit. Besonders kritisch ist der Gebrauch des Begriffs „Schaubild“ in den Lehrwerken *Eins Plus* und *Mathebus* zu sehen. Wie Sill und Kurtzmann (2019, S. 44) hervorheben, ist dieser Begriff fachlich ungenau, da er nicht spezifisch für die Veranschaulichung von Daten in Diagrammen steht, sondern die Zusammenstellung von Texten, Bildern und Diagrammen bezeichnet. Positiv hervorzuheben ist, dass in dem Lehrwerk *Flex und Flo* in der ersten Klasse der Oberbegriff „Streifendiagramm“ verwendet wird und in der zweiten Klasse erst zwischen Säulen- und Balkendiagramm differenziert wird, wie es in der Literatur von Neubert (2019, S. 16) empfohlen wird. In allen anderen Schulbüchern wird auf die vereinfachte Bezeichnung „Streifendiagramm“ verzichtet und es werden gleich die Fachbegriffe Säulen- und Balkendiagramm eingeführt.

Auch im Bereich Wahrscheinlichkeit zeigen sich Unterschiede in der didaktischen Auseinandersetzung. In vier der fünf Lehrwerke kommen Zufallsexperimente vor, wodurch Erfahrungsmöglichkeiten geschaffen werden können, wie sie bereits von Büchter et al. (2005, S. 7) als grundlegende Leitidee hervorgehoben wurde. Würfel- oder Wendepfättchenversuche ermöglichen den Kindern, Zufall nicht nur sprachlich, sondern handelnd zu erfahren.

Einerseits greifen mehrere Lehrwerke alltagsnahe und für Kinder zugängliche Kontexte auf, wie beispielsweise Kleidungskombinationen oder Anordnungen von Bausteinen und Spielfiguren. Dies entspricht den Empfehlungen von Sill und Kurtzmann (2019, S. 174), kombinatorische Fragestellungen an die Lebenswelt der Kinder anzubinden. Andererseits ist nicht jede lebensweltnahe Situation automatisch didaktisch sinnvoll. So erscheint zum Beispiel die Aufgabe zum Anstoßen mit Kindersekt in *Mathebus* eher konstruiert. Darüber hinaus wird in mehreren Aufgaben das zugrunde liegende allgemeine Zählprinzip nicht ausreichend verdeutlicht. Gerade bei Aufgaben, bei denen die Produktregel gilt, wäre eine klare Strukturierung hilfreich. Außerdem gilt es bei kombinatorischen Aufgaben zu klären, ob vertauschte oder gespiegelte Anordnungen als unterschiedliche Ergebnisse gelten, um die mathematische Struktur besser zu entdecken und systematisch alle Möglichkeiten zu erfassen.

Im Hinblick auf handlungsorientierte Zugänge fällt auf, dass diese in den untersuchten Lehrwerken zwar vorhanden, insgesamt aber unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Besonders im Bereich der Statistik bleiben Aufgaben häufig auf bildliche Darstellungen, Tabellen oder vorstrukturierte Formate beschränkt. Die Möglichkeiten, Daten tatsächlich handelnd zu erleben, mit Material darzustellen oder in reale Situationen einzubetten, werden nur vereinzelt genutzt. Besonders die Forschungsergebnisse von Kipman (2015, S. 58–67) zeigen sehr deutlich, wie wichtig für Lernende ein handlungsorientierter Zugang zu stochastischen Inhalten ist, um signifikant bessere Leistungen zu erzielen. Daraufhin wurden aktuelle Schulbücher hinsichtlich der handlungsorientierten Zugänge zum mathematischen Bereich der Stochastik analysiert und es können folgende Forschungsfragen beantwortet werden.

Welche Zugänge zu stochastischen Inhalten bieten Schulbücher der Primarstufe und inwiefern unterstützen diese einen handlungsorientierten Umgang?

In den Schulbüchern wird der Bereich Stochastik bereits vermehrt aufgegriffen, jedoch werden Lernende in den Schulbüchern nicht überwiegend mit Materialien an die neuen Inhalte herangeführt. Die Schulbücher bieten stochastische Inhalte vor allem über alltagsnahe und bildgestützte Zugänge an. Der handlungsorientierte Zugang ist stark von der konkreten Aufgabenstellung abhängig. Während die Arbeit mit Daten eher auf eine interpretierende und beschreibende Bearbeitung beschränkt ist, werden kombinatorische Aufgaben mit alltagsnahen Aufgaben angeführt. Auch wenn nicht immer explizite Handlungsaufträge angeführt werden, bieten sie Lehrpersonen eine gute Grundlage, an die mit handlungsorientierteren Methoden angeknüpft werden kann.

Welche Materialien und Handlungsmöglichkeiten werden in den Aufgaben zur Unterstützung des stochastischen Lernens eingesetzt?

Zur Unterstützung des Lernens werden in stochastischen Aufgaben konkrete und anschauliche Materialien eingesetzt. Dazu zählen insbesondere Würfel, Münzen, Wendepfättchen, Steckbausteine, Stifte und Spielfiguren. Diese Materialien dienen dazu, das Erheben von Daten sichtbar zu machen und Kombinationsmöglichkeiten und Zufallssituationen erfahrbar zu machen. Die damit verbundenen Handlungsmöglichkeiten bestehen vor allem im Anordnen, Würfeln, Vergleichen, Erheben und Dokumentieren. Dadurch, dass Befragungen durchgeführt, Zufallsexperimente ausprobiert und mit Materialien verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gefunden werden, werden stochastische Inhalte in den Schulbüchern nicht nur theoretisch behandelt, sondern auch durch aktives Tun erschlossen.

Spiegeln die Aufgaben zu stochastischen Inhalten die im Lehrplan geforderten Prinzipien des handlungsorientierten Lernens wider?

Die verschiedenen stochastischen Aufgaben in den Lehrwerken tragen wesentlich zur Förderung der Problemlösekompetenz bei. Durch das eigenständige Erheben und Darstellen von Daten müssen die Schülerinnen und Schüler relevante Fragestellungen auswählen und dafür geeignete Merkmale finden. Zudem müssen sie entscheiden, mit welcher Darstellungsform sich die erhobenen Daten am besten darstellen lassen.

Dieser Prozess wird in allen fünf Lehrwerken durchgeführt und erfordert, mathematische Strukturen zu erkennen. In kombinatorischen Aufgaben wird das Problemlösen in besonders hohem Maß verlangt. Das systematische Finden aller Kombinationsmöglichkeiten erfordert den Einsatz geeigneter Problemlösestrategien, wie beispielsweise das Erstellen von Baumdiagrammen oder die Nutzung von Analogien. Besonders in den Lehrwerken *Lilli, Bakabu & du* und *Mathebus* werden die Kinder zur Verwendung von Strategien angeleitet. Auch im Bereich der Wahrscheinlichkeit werden in den Schulbüchern *Eins Plus*, *MiniMax*, *Flex und Flo* und *Mathebus* zentrale Problemlöseprozesse aktiviert. Durch die Durchführung von Zufallsexperimenten werden die Lernenden angeregt, vorhandene Vermutungen zu überprüfen. Insgesamt leisten die in den Lehrwerken verwendeten Aufgaben einen wesentlichen Beitrag zur Förderung der Problemlösekompetenz im Sinne des Lehrplans (BMBWF, 2023).

Insgesamt zeigt sich, dass in den Aufgaben bereits verschiedene konkrete Materialien und Handlungsmöglichkeiten zur Unterstützung des stochastischen Lernens eingesetzt werden. Dennoch wäre in vielen Bereichen eine noch intensivere handlungsorientierte Umsetzung möglich. So könnte beispielsweise bei der Datenerhebung die Methode der „lebendigen Statistik“, welche von Sill und Kurtzmann (2019) angeführt wurde, einfach integriert werden, um Daten nicht nur abzulesen oder einzutragen, sondern anschaulich erfahrbar zu machen. Auch im Bereich der Kombinatorik besteht Potenzial zur stärkeren Differenzierung. Während leistungsstarke Kinder die Aufgabenstellungen in den Schulbüchern vermutlich oft ohne Hilfsmittel lösen können, sind für leistungsschwächere Kinder konkrete Materialien beim Finden von Kombinationsmöglichkeiten häufig unverzichtbar. Eine differenziertere und verstärkt handelnde Gestaltung der Aufgaben könnte somit dazu beitragen, stochastisches Lernen noch gezielter an die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen der Kinder anzupassen.

5.6.1. Limitation

Bei der Interpretation der Ergebnisse dieser Schulbuchanalyse sind mehrere Einschränkungen zu berücksichtigen. Zum einen bezieht sich die Analyse ausschließlich auf fünf verschiedene Mathematikschulbücher für die Grundstufe 1, wodurch keine allgemeingültigen Aussagen über Mathematikbücher in Österreich getätigt werden können. Zwar bietet die Auswahl einen Einblick in unterschiedliche

Zugänge zu stochastischen Inhalten, repräsentiert jedoch nicht alle verfügbaren Lehrwerke.

Eine weitere Limitation besteht darin, dass sich die Analyse nur auf die Aufgabenstellungen in den Schulbüchern konzentriert und nicht auf die tatsächliche Umsetzung der Lehrpersonen im Unterricht. Besonders auf der handlungsbezogenen Ebene ist die didaktische Aufbereitung der Lehrperson entscheidend und das Lehrwerk dient vielmehr als Grundlage. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind daher als ein fundierter Einblick in die schulbuchbezogene Umsetzung stochastischer Inhalte in der Primarstufe zu verstehen.

6. Fazit

Ziel dieser Masterarbeit war es, zu untersuchen, welche handlungsorientierten Zugänge zu stochastischen Inhalten in den Mathematikschulbüchern der ersten und zweiten Klasse der Primarstufe geboten werden und welche Materialien dabei eingesetzt werden. Die Analyse von fünf Schulbüchern der Grundstufe 1 zeigt, dass stochastische Inhalte in allen untersuchten Lehrwerken verankert sind, jedoch in unterschiedlicher Intensität und didaktischer Gestaltung bearbeitet werden.

Besonders deutlich wurde, dass der Bereich Statistik in allen Lehrwerken den größten Raum einnimmt, während Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik unterschiedlich stark berücksichtigt werden. Positiv hervorzuheben ist, dass stochastische Inhalte in mehreren Lehrwerken im Sinne des Spiralprinzips wiederholt aufgegriffen werden und dadurch einer einmaligen Auseinandersetzung entgegengewirkt wird. Zudem werden vielfach alltagsnahe Zugänge gewählt, wie beispielsweise durch Befragungen zu eigenen Vorlieben oder äußeren Merkmalen, wodurch an die Lebenswelt der Kinder angeknüpft wird. Auch fachliche Begriffe werden überwiegend korrekt und verständlich eingeführt.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die analysierten Schulbücher bereits wichtige Grundlagen für stochastisches Lernen in der Primarstufe schaffen. Sie bieten alltagsbezogene, motivierende und teilweise handlungsorientierte Zugänge, die an die zentralen Anforderungen des Lehrplans anschließen. Zugleich zeigt die Analyse, dass im aktiven Umgang mit Materialien zur Einführung stochastischer Inhalte noch Entwicklungsbedarf besteht. Daraus ergibt sich, dass Schulbücher zwar eine wichtige Grundlage für stochastisches Lernen darstellen, die Qualität des Unterrichts jedoch wesentlich davon abhängt, inwiefern Lehrpersonen diese Inhalte aufgreifen, erweitern und durch zusätzliche handlungsorientierte Methoden ergänzen.

Literaturverzeichnis

- Apfler, S., Musilek, M. & Summer, A. (2023). Zufällige Mathematik: Daten, Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik für die Grundschule handlungsorientiert aufbereiten. *More of Mathematics: Konferenzband zum Tag der Mathematik*, 10(2), 4–11. <https://doi.org/10.53349/resource.2023.i2.a1169>
- Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? Stochastische Vorstellungen fördern. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47(4), 1–7.
- Bettner, M. & Dinges, E. (2018). *Stochastik in der Grundschule: Kombinieren, schätzen, Daten erfassen und auswerten*. Persen Verlag.
- Biehler, R. & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Springer.
- Biehler, R. & Frischemeier, D. (2015). Förderung von Datenkompetenz in der Primarstufe. *Lernen und Lernstörungen*, 4(2), 131–137.
- Bruns, J. & Jensen, S. (2021). "Dieser Stein bin ich!". Umgang mit Daten von Anfang an. *Fördermagazin Grundschule*, (4), 13–15. https://doi.org/10.5555/fgs-4-2021_03
- Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review*. Nuffield Foundation.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (2023). *Lehrplan der Volksschule*. <https://www.paedagogik-paket.at/component/edocman/239-lehrplan-2>
- Eichhorn, K. (2024). *Mit Kombinatorik durch das Schuljahr: Aufgaben mit Spaß zum Entdecken, Erproben und Darstellen von Möglichkeiten*. Auer Verlag.
- Eichler, A. (2020). Chaotisch beginnen – musterhaft enden. Daten und Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule. *Die Grundschulzeitschrift*, 34(319), 28–31.

- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Frommeld, L. & Spann, M. (2022). Der Wahrscheinlichkeit auf der Spur. Zufallsbedingten Phänomenen spielerisch begegnen. *Grundschulmagazin*, 90(5), 18–21. https://doi.org/10.5555/gsmag-5-2022_04
- Hasemann, K., Mirwald, E. & Hoffmann, A. (2008). Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 141–161). Cornelsen.
- Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse. Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieeinsatz als Einflussfaktor auf die Lösungsgüte. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(2), 263–289.
- KIRA. (n.d.). *Kombinatorik*. DZLM. <https://kira.dzlm.de/node/145>
- Kipman, U. (2014). Stochastik mit Kindern? *News & Science*, 38, 47–50.
- Kipman, U. (2015). Kombinatorik in der (Grund) Schule. Problemlösekompetenzen früh und spielerisch fördern. *Ph.script*, 8, 54–67.
- Kipman, U. (2019). *Problemlösen*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- Lorenz, J. H. (2006). Die Kunst des Mutmaßens. *Grundschule Mathematik*, 9, 4–7.
- Martignon, L. & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 8(2), 202–222. <https://doi.org/10.1007/s11618-005-0134-1>
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Neubert, B. (2019). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele für die Grundschule*. Mildenerger.
- PIKAS. (2019). *Gute Aufgaben: Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten – eine inhaltsbezogene Kompetenz in der Grundschule*. <http://www.pikas.dzlm.de>

- Ruwisch, S. (2012). Wahrscheinlichkeit in der Grundschule? Möglich? Sicher! *Grundschule Mathematik*, 9(32), 40–43.
- Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen: 2. Schuljahr*. Schroedel.
- Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum.
- Ulm, V. (2010). *Stochastik in der Grundschule*. Universität Augsburg.
- Weber, K. & Ott, D. (2022). Neue Blumen für den Vorgarten. Zusammenhänge und Strukturen kombinatorischer Aufgaben. *Grundschulmagazin*, (5), 12–17. https://doi.org/10.5555/gsmag-5-2022_03
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). *Statistical Thinking in Empirical Enquiry*. International Statistical Institute.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Tabelle (Neubert, 2019, S. 15).....	5
Abbildung 2: Streifendiagramm (Neubert, 2019, S. 16)	6
Abbildung 3: Kreisdiagramm (Neubert, 2019, S. 17).....	7
Abbildung 4: Darstellung mit Piktogrammen (Neubert, 2019, S. 18).....	7
Abbildung 5: Datenanalysekreislauf (Wild & Pfannkuch, 1999, S. 225).....	7
Abbildung 6: Aufgabenformate Kombinatorik (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 171)	11
Abbildung 7: Darstellung der Kombinationsmöglichkeiten (Weber & Ott, 2022, S. 14)	12
Abbildung 8: Baumdiagramm zur Darstellung von Kombinationsmöglichkeiten (Sill & Kurtzmann, 2019, S.178)	13
Abbildung 9: KI(D)S-Koffer (Kipman, 2014, S. 47).....	18
Abbildung 10: Datenerhebung mit Steckwürfeln (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 40).....	21
Abbildung 11: Lebendige Statistik (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 52)	22
Abbildung 12: Systematische und unsystematische Darstellung von Kombinationsmöglichkeiten (Weber & Ott, 2022, S. 12).....	32
Abbildung 13: Bauen von Häusern (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 191)	33
Abbildung 14: Streifenschieber (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 193).....	33
Abbildung 15: Gegenständliches Baumdiagramm zur Bildung von Tiernamen (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 201)	34
Abbildung 16: Allgemeines inhaltsanalytisches Ablaufmodell (Mayring, 2015, S. 62)	36
Abbildung 17: Würfelübung (Eins Plus 1, Erarbeitungsteil, S. 101)	41
Abbildung 18: Darstellung mit Steckbausteinen (Eins Plus 1, Erarbeitungsteil, S. 99).....	42
Abbildung 19: Baumdiagramm (Lilli, Bakabu & du 2, Abenteuer Knobeln, Muster und Daten, S. 34).....	44
Abbildung 20: Beschriftung Diagramm (Lilli, Bakabu & du 1, Abenteuer Knobeln, Muster und Daten, S. 34).....	44
Abbildung 21: Kombinatorikaufgabe mit Steckbausteinen (Lilli, Bakabu & du 1, Abenteuer Knobeln, Muster und Daten, S. 34).....	45
Abbildung 22: Darstellung mit Piktogrammen (Mathebus 2, Maßeinheiten, Größen, S. 30) .	47
Abbildung 23: Hilfestellung Diagramme (Mathebus 2, Alle rechnen, S. 112)	48
Abbildung 24: Begriffserklärung Diagramme (Mathebus 2, Alle rechnen, S. 112).....	48
Abbildung 25: Begriffe Wahrscheinlichkeit (MiniMax 2, Zahlen und Rechnen Teil B, S. 74) .	51
Abbildung 26: Wendepfättchen Werfen (MiniMax 2, Zahlen und Rechnen Teil B, S. 73).....	52
Abbildung 27: Zusammenfassung Begriffe (Flex und Flo, Sachrechnen und Größen, S. 48)54	
Abbildung 28: Zufallsexperimente (Flex und Flo, Sachrechnen und Größen, S. 43).....	56

Anhang

Name	Analysekriterium A	Analysekriterium B	Analysekriterium C	Analysekriterium D	Analysekriterium E	Analysekriterium F
Eins Plus	1. Klasse 11 Aufgaben 2. Klasse 17 Aufgaben	Säulendiagramme Tabellen Strichlisten Balkendiagramm	Schaubilder Diagramme Balkendiagramm Säulendiagramm wahrscheinlich, unwahrscheinlich, unmöglich Umfrage	Steckbausteine Würfel	Abenteuergeschichten Hoher Lebensweltbezug	Mittlere Aktivierung gesamter Datenanalyse- kreislauf
Lilli, Bakabu und du	1. Klasse 10 Aufgaben 2. Klasse 12 Aufgaben	Säulendiagramm Tabellen Strichlisten Balkendiagramm Baumdiagramm	Diagramm Balkendiagramm Säulendiagramm Baumdiagramm Befragung	Steckbausteine	Mittlerer Lebensweltbezug	Mittlere Aktivierung
MiniMax	1. Klasse 10 Aufgaben 2. Klasse 10 Aufgaben	Säulendiagramm Tabellen Strichlisten	Diagramm Säulendiagramm Umfrage Befragung Sicher Möglich unmöglich	Wendeplättchen	Hoher Lebensweltbezug	Mittlere Aktivierung gesamter Datenanalyse- kreislauf

Flex und Flo	1. Klasse 13 Aufgaben 2. Klasse 20 Aufgaben	Säulendiagramm Tabellen Strichlisten Balkendiagramm	Streifenbild Säulendiagramm Balkendiagramm Sicher Möglich unmöglich	Würfel Drehscheibe Urne mit unterschiedlichen Kugeln	Mittlerer Lebensweltbezug	Mittlere Aktivierung
Mathebus	1. Klasse 10 Aufgaben 2. Klasse 33 Aufgaben	Säulendiagramm Tabellen Strichlisten Balkendiagramm Schaubilder	Schaubilder Säulendiagramm Balkendiagramm Umfrage	Würfel Münze Legeplättchen Stifte Spielfiguren	Mittlerer Lebensweltbezug	Hohe Aktivierung gesamter Datenanalyse- kreislauf

Eidesstattliche Erklärung

„Ich erkläre, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbst verfasst habe und dass ich dazu keine anderen als die angeführten Behelfe verwendet habe. Außerdem habe ich ein Belegexemplar verwahrt.“ (Satzung der Pädagogischen Hochschule Salzburg Stefan Zweig, Studienrechtliche Bestimmungen § 5 (p))

Gamporn, 5.5.2026
Ort, Datum

Lisa Steiner
Unterschrift